

# מתמטיקה 1

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה.....1

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-2 בדוק את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"<sup>1</sup> שלהן, ושרטט גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3) \text{ נתונה הפונקציה :}$$

- א. בדוק את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.  
 ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבע מאיזה סוג היא.

בשאלות 4-7: מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (6)$$

הערה: שאלה 7 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

<sup>1</sup> נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$  בשאלות 8-10, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שלומדים את כלל לופיטל.

**(11)** הוכח או הפרך:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

**(12)** ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה. האם  $f+g$  רציפה? הוכח את טענתך.

**(13)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$ .

הוכח או הפרך :

- א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .
- ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .
- ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .
- ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(14)** תהי  $f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
- ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ . האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

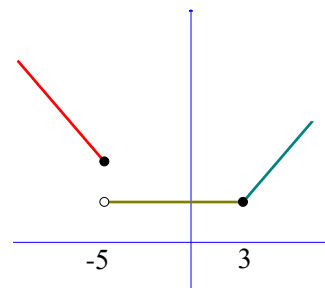
**(15)** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי  $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

- א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמק.
- ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמק.

### תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) א. רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ . ב. סליקה.
- (4)  $k=1$
- (5)  $k=4$
- (6)  $k=\frac{2}{3}$
- (7)  $k=-1$
- (8)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (9)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (10)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.
- (14) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (15) א. לא. ב. כן.