

פונקציות מרוכבות ואנליזה הרמונית 40111

פרק 11 - שאלות מסכמות ברמת בחינה בפונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

1. תרגילים.....1

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

(1) חשבו את האינטגרל: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

(2) נניח כי: $f = u + iv$ שלמה כך ש- $v(x, y) = \cosh[u(x, y)]$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(3) הוכיחו כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$

(4) חשבו את האינטגרל: $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$

(5) פתחו את הפונקציה: $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^4}$ לטור לורן בטבעת $0 < |z - i| < 2$.

(6) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < 1$ וזוגית (כלומר: $f(z) = f(-z)$). חשבו: $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$.

תשובות סופיות:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (4)$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4} \frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases} \quad (5)$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (6)$$