פונקציות מרוכבות והתמרות אינטגרליות

פרק 16 - שאלות מסכמות ברמת בחינה בפונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0)=\{|z|<1\}$ כך ש- $|f(z)|=\ln(2+|z|)$ לכל $z\in B_1(0)$?

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<\infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R>0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi}\left|f(\mathrm{R}e^{i\theta})\right|d\theta\le 2\pi R^{\alpha}$.
הוכיחו כי: $f(z)=0$ בטבעת.

3) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

4) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^z-i}{e^z+i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה: $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\right\}$.

5) נניח כי: $f=u+iv$ שלמה כך ש- $v(x,y)=\cosh\left[u(x,y)\right]$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) הוכח / הפרך:
קיימת סדרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0\ne a_n\in\mathbb{C}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n a_n}{(2k+1)^n}=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

7) הוכיחו כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2t\cos(0)}d\theta$.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$f\left(\frac{1}{n}\right)\neq\frac{1}{n+2}$.

9) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}$.

10) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש-$\left|z^2\cdot f(z)+e^z\right|\le 1$ לכל $|z|<1$.

11) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<2$ כך שלכל $n\ge 0$ מתקיים:

$\oint_{|z|=1} z^n f(z)dz=0$. הוכיחו כי $\lim_{z\to 0} f(z)$ קיים וסופי.

12) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה $f(z)$ שלמה כך ש-$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

13) האם קיימת f שלמה המקיימת:

$f(x)=\begin{cases} x^4 & x\in\mathbb{R},\ x>0 \\ -x^4 & x\in\mathbb{R},\ x<0 \end{cases}$.

14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי: $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} \left|Log(z)\right|=\infty$.

ב. הראו כי: $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} \left|z\cdot Log(z)\right|=0$.

ג. האם הפונקציה: $f(z)=\begin{cases} z\cdot Log(z) & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ אנליטית ב-$z=0$?

15) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$.

16) פתחו את הפונקציה: $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$ לטור לורן בטבעת $0<|z-i|<2$.

17) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<1$ וזוגית (כלומר: $f(z)=f(-z)$).

חשבו: $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

18) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-

$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right)\neq\frac{1}{n}$.

19) תהי: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה.

נניח כי: $f^2(z)$ ו-$f^3(z)$ אנליטיות ב-$B_1(0)$.

הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$.

20) הוכח / הפרך:

אם: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה ו-$f^2(z)$ ו-$f^6(z)$ אנליטיות ב-$B_1(0)$

אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב-$B_1(0)$.

תשובות סופיות:

1) לא.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) לא קיימת.
14) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.
15) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
16) $a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4}\frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k\ge -4 \\ 0 & k\le -5 \end{cases}$.
17) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 2\pi i\cdot \text{Res}\left[f(z),0\right]=0$.
18) הוכחה.
19) הוכחה.
20) הוכחה.