

# פונקציות מרוכבות

פרק 13 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים.....1

## שאלות מסכמות ברמת בחינה:

### שאלות:

(1) האם קיימת  $f$  אנליטית ב-  $B_1(0) = \{|z| < 1\}$  כך ש-  $|f(z)| = \ln(2 + |z|)$  לכל  $z \in B_1(0)$  ?

(2) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < \infty$  ונניח כי קיים מספר  $\alpha$  ממשי שאינו שלם כך שלכל  $R > 0$  מתקיים:  $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi R^\alpha$ . הוכיחו כי:  $f(z) = 0$  בטבעת.

(3) יהי  $|a| < 1$ . כמה פתרונות יש למשוואה:  $e^{z+2} = \left(\frac{z-a}{1-\bar{a} \cdot z}\right)^{2020}$  ב-  $B_1(0)$  ?

(4) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה  $f(z)$  אנליטית ב-  $B_{1+\varepsilon}(0)$  כך ש-  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(5) הראו כי הטור:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^z - i}{e^z + i}\right)^n$  מתכנס בהחלט ברצועה:  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < \pi\}$ .

(6) נניח כי:  $f = u + iv$  שלמה כך ש-  $v(x, y) = \cosh[u(x, y)]$ . הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

(7) הוכיחו כי לכל  $R > 0$  קיים  $N \in \mathbb{N}$  כך שלכל  $n > N$  למשוואה:  $1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} = 0$  אין פתרון ב-  $B_R(0)$ .

(8) הוכח / הפרך :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n a_n}{(2k+1)^n} = 0 \text{ ו-} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \text{ ש-כך } 0 \neq a_n \in \mathbb{C}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ קיימת סדרה:}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}.$$

$$(9) \text{ הוכיחו כי לכל } t \in \mathbb{R} \text{ מתקיים: } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$$

(10) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ . הוכיחו כי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $\frac{1}{n+2} \neq f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

$$(11) \text{ חשבו את האינטגרל: } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1}$$

(12) הוכח / הפרך :

$$\text{קיימת פונקציה שלמה } f(z) \text{ כך ש-} |z^2 \cdot f(z) + e^z| \leq 1 \text{ לכל } |z| < 1.$$

(13) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < 2$  כך שלכל  $n \geq 0$  מתקיים:

$$\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0 \text{ . הוכיחו כי } \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \text{ קיים וסופי.}$$

(14) הוכח / הפרך :

$$\text{קיימת פונקציה שלמה } f(z) \text{ כך ש-} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} \text{ לכל } n \in \mathbb{N}.$$

(15) האם קיימת  $f$  שלמה המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}, x > 0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}, x < 0 \end{cases}$$

16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי:  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |\text{Log}(z)| = \infty$

ב. הראו כי:  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |z \cdot \text{Log}(z)| = 0$

ג. האם הפונקציה:  $f(z) = \begin{cases} z \cdot \text{Log}(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  אנליטית ב- $z=0$ ?

17) חשבו את האינטגרל:  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

18) פתחו את הפונקציה:  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4}$  לטור לורן בטבעת  $0 < |z-i| < 2$ .

19) נתון כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < 1$  וזוגית (כלומר:  $f(z) = f(-z)$ ).

חשבו:  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$

20) נניח כי:  $f(z): B_2(0) \rightarrow \mathbb{C}$  אנליטית ונניח כי בתחום:  $U = \{1 < |z| < 2\}$  היא

חח"ע. הוכיחו כי  $f(z)$  חח"ע ב- $B_2(0)$ .

רמז: המשמעות הגיאומטרית של עקרון הארגומנט.

21) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ . הוכיחו כי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש-

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \neq \frac{1}{n}$$

22) תהי:  $h(z) = z^2 - 4 - e^{-3z}$ . מצאו את מספר האפסים של  $h(z)$  בחצי המישור

הימני:  $\text{Re}(z) > 0$ .

23) מצאו את התמונה של הרביע הראשון:  $A = \{z | \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 0\}$  תחת

ההעתקה:  $f(z) = \frac{(1+z^2) - i(1-z^2)}{(1+z^2) + i(1-z^2)}$

**(24)** יהי:  $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  פולינום מתוקן.  $n \in \mathbb{N}$ .  
הוכיחו כי כל שורשי הפולינום נמצאים בעיגול:

$$|z| < \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + \dots + |a_1|^2 + |a_0|^2}$$

רמז: אי שוויון קושי שוורץ:  $\left| \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k \bar{b}_k \right| \leq \sqrt{\left( \sum_{k=0}^{k=n-1} |a_k|^2 \right) \left( \sum_{k=0}^{k=n-1} |b_k|^2 \right)}$

**(25)** תהי:  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  לאו דווקא רציפה.

נניח כי:  $f^2(z)$  ו- $f^3(z)$  אנליטיות ב- $B_1(0)$ .

הוכיחו כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ .

**(26)** הוכח / הפרך:

אם:  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  לאו דווקא רציפה ו- $f^2(z)$  ו- $f^6(z)$  אנליטיות ב- $B_1(0)$

אז  $f(z)$  בהכרח אנליטית ב- $B_1(0)$ .

**(27)** חשבו את האינטגרל:  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{e^z - 1} dz$

**(28)** חשבו את האינטגרל:  $\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2} \cos\left(e^{\frac{1}{z}}\right)}{z-2} dz$

**(29)** נסמן:  $f(z) = \tan(z)$  ו- $A = \left\{ z \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$ . מצאו את  $f[A]$ .

**(30)** נניח כי:  $f(z) = u + iv$  אנליטית ב- $B_1(0)$  וכי:  $|u(x, y)| + |v(x, y)| = 1$  ב- $B_1(0)$ .

הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

## תשובות סופיות:

(1) לא.

(2) הוכחה.

(3) אין פתרונות.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (11)$$

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) הוכחה.

(15) לא קיימת.

(16) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4} \frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases} \quad (18)$$

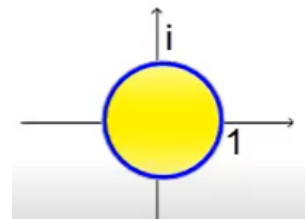
$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (19)$$

(20) הוכחה.

(21) הוכחה.

(22) 1.

(23) להלן רביע ראשון:



(24) הוכחה.

(25) הוכחה.

(26) הוכחה.

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i \quad (27)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2} \cos\left(e^{\frac{1}{z}}\right)}{z-2} dz = -\frac{\pi i}{2} \cos(\sqrt{e}) \quad (28)$$

(29) ראו סרטון.

(30) הוכחה.