פונקציות מרוכבות

פרק 13 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0)=\{|z|<1\}$ כך ש- $|f(z)|=\ln(2+|z|)$ לכל $z\in B_1(0)$?

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<\infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R>0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi}\left|f\left(\mathrm{Re}^{i\theta}\right)\right|d\theta\le 2\pi R^{\alpha}$.
הוכיחו כי: $f(z)=0$ בטבעת.

3) יהי $|a|<1$. כמה פתרונות יש למשוואה: $e^{z+2}=\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}\right)^{2020}$ ב- $B_1(0)$?

4) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

5) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^z-i}{e^z+i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה:
$U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$.

6) נניח כי: $f=u+iv$ שלמה כך ש- $v(x,y)=\cosh[u(x,y)]$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

7) הוכיחו כי לכל $R>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ למשוואה:
$1+z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^n}{n!}=0$ אין פתרון ב- $B_R(0)$.

8) הוכח / הפרך:

קיימת סדרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $0 \neq a_n \in \mathbb{C}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n a_n}{(2k+1)^n} = 0$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

9) הוכיחו כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2t\cos(0)}d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}$.

10) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) \neq \frac{1}{n+2}$.

11) חשבו את האינטגרל: $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}$.

12) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש- $\left|z^2 \cdot f(z) + e^z\right| \leq 1$ לכל $|z| < 1$.

13) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < 2$ כך שלכל $n \geq 0$ מתקיים:

$\oint_{|z|=1} z^n f(z)dz = 0$. הוכיחו כי $\lim_{z\to 0} f(z)$ קיים וסופי.

14) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה $f(z)$ שלמה כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

15) האם קיימת f שלמה המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}\ ,\ x > 0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}\ ,\ x < 0 \end{cases}$$.

16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי: $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} |Log(z)| = \infty$.

ב. הראו כי: $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} |z\cdot Log(z)| = 0$.

ג. האם הפונקציה: $f(z)=\begin{cases} z\cdot Log(z) & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ אנליטית ב-$z=0$?

17) חשבו את האינטגרל: $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$.

18) פתחו את הפונקציה: $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$ לטור לורן בטבעת $0<|z-i|<2$.

19) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<1$ וזוגית (כלומר: $f(z)=f(-z)$).
חשבו: $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

20) נניח כי: $f(z):B_2(0)\to\mathbb{C}$ אנליטית ונניח כי בתחום: $U=\{1<|z|<2\}$ היא חח״ע. הוכיחו כי $f(z)$ חח״ע ב-$B_2(0)$.
רמז: המשמעות הגיאומטרית של עקרון הארגומנט.

21) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב-$B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-
$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right)\neq\frac{1}{n}$.

22) תהי: $h(z)=z^2-4-e^{-3z}$. מצאו את מספר האפסים של $h(z)$ בחצי המישור הימני: $\operatorname{Re}(z)>0$.

23) מצאו את התמונה של הרביע הראשון: $A=\{z\,|\operatorname{Re}(z)>0,\operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה: $f(z)=\frac{\left(1+z^2\right)-i\left(1-z^2\right)}{\left(1+z^2\right)+i\left(1-z^2\right)}$.

24) יהי: $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ פולינום מתוקן. $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי כל שורשי הפולינום נמצאים בעיגול:
$|z|<\sqrt{1+|a_{n-1}|^2+...+|a_1|^2+|a_0|^2}$.
רמז: אי שוויון קושי שוורץ: $\left|\sum_{k=0}^{k=n-1}a_k\overline{b}_k\right|\le\sqrt{\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{k=n-1}|b_k|^2\right)}$.

25) תהי: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה.
נניח כי: $f^2(z)$ ו- $f^3(z)$ אנליטיות ב- $B_1(0)$.
הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$.

26) הוכח / הפרך:
אם: $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה ו- $f^2(z)$ ו- $f^6(z)$ אנליטיות ב- $B_1(0)$
אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב- $B_1(0)$.

27) חשבו את האינטגרל: $\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2}\frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1}dz$.

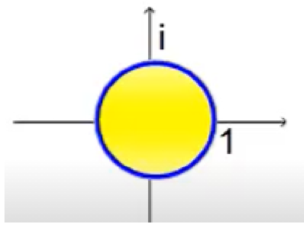
28) חשבו את האינטגרל: $\oint_{|z|=1}\frac{\frac{1}{z^2}\cos\left(e^{\frac{1}{z}}\right)}{z-2}dz$.

29) נסמן: $f(z)=\tan(z)$ ו- $A=\left\{z\in\mathbb{C},-\frac{\pi}{4}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$. מצאו את $f[A]$.

30) נניח כי: $f(z)=u+iv$ אנליטית ב- $B_1(0)$ וכי: $|u(x,y)|+|v(x,y)|=1$ ב- $B_1(0)$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות:

1) לא.
2) הוכחה.
3) אין פתרונות.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.
15) לא קיימת.
16) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.
17) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
18) $a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4}\frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases}$.
19) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz = 2\pi i\cdot \text{Res}\left[f(z),0\right] = 0$.
20) הוכחה.
21) הוכחה.
22) 1.
23) להלן רביע ראשון:



24) הוכחה.

25) הוכחה.

26) הוכחה.

27) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{e^{\frac{1}{z}}-1} dz = 2\pi i$.

28) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2}\cos\left(e^{\frac{1}{z}}\right)}{z-2} dz = -\frac{\pi i}{2}\cos\left(\sqrt{e}\right)$.

29) ראו סרטון.

30) הוכחה.