אלגברה ליניארית : ידה ידה - בלה בלה בלה

פרק 1 - שדות

תוכן העניינים

שדות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על R.
בדוק, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $x\oplus y=x+y+4$
$x\otimes y=2xy$

ב. $x\oplus y=x+y$
$x\otimes y=2xy$

ג. $x\oplus y=y$
$x\otimes y=y^2$

2) נתונה הקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\right\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכח שהקבוצה $Q\left[\sqrt{2}\right]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

3) נתונה הקבוצה $C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ \ ,\ \ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הוכח שהקבוצה C, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.
באיזה שדה מפורסם מדובר?

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.
ב. הוכח שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.
ג. הוכח שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.
ד. הוכח שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.

5) יהיו a,b איברים בשדה.

א. הוכח כי $a+a=a \Leftarrow a=0$.

ב. הוכח כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

ג. הוכח כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

6) יהיו a ו- b איברים של שדה.
הוכח כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

7) הוכח שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכח כי $ab=cb \Rightarrow a=c$, לכל a,b,c, בשדה $(b\neq 0)$.

8) הוכח שלכל שלושה איברים בשדה $0\neq a,b,c$,
קיים בשדה איבר יחיד x, כך ש- $ax+b=c$.

9) נתון F שדה, ויהיו $x,y\in F$, כך ש- $xy\neq 0,1$.
הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x-xyx)^{-1}=x^{-1}+(y^{-1}-x)^{-1}$,
וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

10) בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על R^2.

א. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$

ב. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$

האם $\left(R^2,+,\cdot\right)$ שדה?

11) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה $A=\{f:R\to R\mid \forall x,\ f(x)\neq 0\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
האם הקבוצה A, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה $B=\{f:R\to R\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.
האם הקבוצה B, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

12) יהי F שדה בעל מספר **סופי** של איברים.
הראו שלכל איבר $a \neq 0$ ב- F, קיים k טבעי, כך ש- $a^k = 1_F$.

13) נתון השדה Z_7.
א. רשום את כל איברי השדה והגדר את פעולות החיבור והכפל בשדה.
ב. מצא את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.
ג. מצא את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

14) נתונה הקבוצה $Z_p = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\right\}$, p מספר ראשוני.
כאשר $\overline{a} = \left\{x \in Z \mid a \equiv x (\mathrm{mod}\ p)\right\}$, ו- $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a \equiv b (\mathrm{mod}\ p)$.
לכל $\overline{a}, \overline{b}$ בקבוצה, מגדירים פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a \cdot b}$$

הוכח ש- $\left(Z_p, \oplus, \otimes\right)$ מהווה שדה.
בקיצור, הוכח כי קבוצת השאריות מודולו p, כאשר p ראשוני, מהווה שדה.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
11) בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
12) שאלת הוכחה.
13) א. שאלת הוכחה.
ב. האיבר הנגדי לאיבר $\overline{3}$ הוא $\overline{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\overline{5}$ הוא $\overline{2}$.
ג. האיבר ההופכי לאיבר $\overline{4}$ הוא $\overline{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\overline{5}$ הוא $\overline{3}$.
14) שאלת הוכחה.