

תורת ההסתברות והסטטיסטיקה

פרק 45 - שיטת המומנטים בשערוך פרמטר

תוכן העניינים

1. שיטת המומנטים 1

שיטת המומנטים:

רקע:

מומנט מסדר ראשון של משתנה X מוגדר להיות: $E(X)$.

מומנט מסדר שני של משתנה X מוגדר להיות: $E(X^2)$.

באופן כללי, מומנט מסדר r מוגדר להיות: $E(X^r)$.

מומנט מסדר ראשון של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר

להיות: $\frac{\sum X_i}{n}$ - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר

להיות: $\frac{\sum X_i^2}{n}$ - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר r של n תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר

להיות: $\frac{\sum X_i^r}{n}$ - זהו מומנט ה- r של המדגם.

השיטה: משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר λ (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את λ בשיטת המומנטים.

שאלות:

- (1) X מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי a לערך המכסימלי 20. מצא אומד לערך מינימלי a לפי שיטת המומנטים על סמך n תצפיות מההתפלגות.
- (2) דוגמים n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא μ והשונות שלה היא σ^2 . מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.
- (3) אדם מטיל מטבע רגיל n פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך X – מספר העצים שהוא קיבל.
א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל- n על סמך X בודד.
ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל- n על סמך חזרה של m פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.
ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים:
פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.
- (4) נתון ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$. מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר λ על סמך מדגם של n תצפיות.
- (5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.
א. בטא את $E(X)$ כפונקציה של הפרמטר θ .
ב. מצא אומד ל- θ על פי שיטת המומנטים.
- (6) הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא: $X_i \sim N(10, \sigma^2)$.
במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות: 4, 6, 10, 5.
א. אמוד את σ^2 בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל n .
ב. מצא את האומדן ל- σ^2 . מה הבעייתיות בתשובה?

תשובות סופיות:

$$\hat{a} = 2\bar{X} - 20 \quad (1)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2, \quad \bar{X} = \hat{\mu} \quad (2)$$

$$\hat{a} = 2X \quad \text{א.} \quad \hat{a} = 2\bar{X}_m \quad \text{ב.} \quad \hat{a} = 10\frac{2}{3} \quad \text{ג.} \quad (3)$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}} \quad (4)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}} \quad \text{ב.} \quad \frac{\theta}{\theta + 1} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - 100 \quad \text{א.} \quad \hat{\sigma}^2 = -55.75 \quad \text{ב.} \quad (6)$$