

# מתמטיקה לביולוגים 1

פרק 17 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

1. בעיות גיאומטריות..... 1
2. עקומות אורתוגונליות..... 3
3. בעיות גדילה ודעיכה..... 5

## בעיות גיאומטריות

### שאלות

(1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום,

$$\text{שווה ל-} -\frac{x}{y}.$$

מצא את משוואת העקום.

(2) מצא את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

(3) מצא את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

(4) נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(2, 4)$ .

נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $A(x, y)$  שעליו, ובין שיפוע הישר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים, שווה לשיעור ה- $y$  של הנקודה  $A$ .

(5) מצא את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3, 4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

(6) קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו וציר ה- $x$ , נחצה על ידי ציר ה- $y$ . מצא את משוואת העקום זה.



(7) נתון עקום העובר בנקודה  $B(0,1)$ .

בכל נקודה  $A$  שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$ , הנראה בציור. מהי משוואת העקום?

(8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה  $(1, 3)$ ,

ושיפוע המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ .

מצא את משוואת העקום.

(9) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(1,2)$ ,  
 ושכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא  $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$ .

(10) מצא את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(0,1)$ , כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר ה- $y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו  $M(x, y)$  והקטע  $OM$ , מהראשית  $O$  ל- $M$ , הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע  $MN$  (כאשר  $N$  היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- $y$ ). צייר ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

### תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות

מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

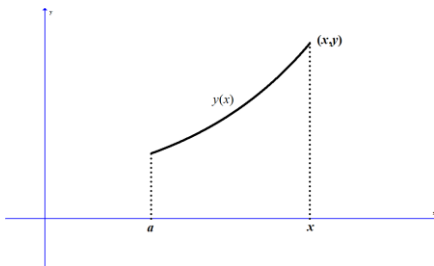
$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (3)$$

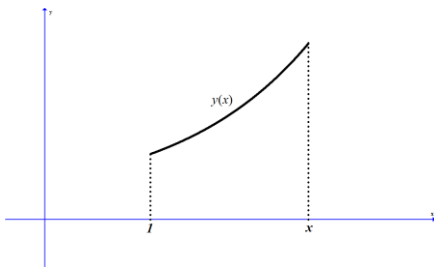
ב. מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$ , בנקודה  $(1, 2)$  שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

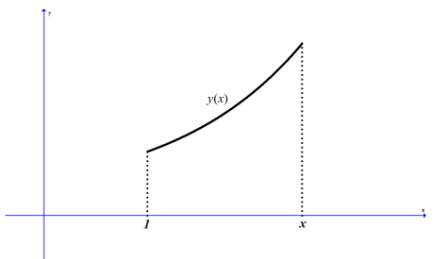
(5) מצא את משפחת העקומות, היוצרות זווית של  $45^\circ$  עם משפחת המעגלים  $x^2 + y^2 = c$ .



(6) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(a, y(a))$  ו- $(x, y(x))$ . מצא את משוואת העקום.



(7) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך ששטחו של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



(8) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיים עקום כזה, כך שהשטח של  $S$  שווה ל- $2 - y(x)$ ?

### תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

$$y = ax^2, \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \quad (5)$$

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (6)$$

לא. (7)

כן. (8)

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
- ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
- ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- \*הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים, ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- א. מצא את אחוז הגידול השנתי.
- ב. מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת), היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- א. כמה כסף הפקיד האדם?
- ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה הראשונית היו 1,000 חיות. בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה, היו בשמורה 2,000 חיות בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד, פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים, מכמות התחלתית של 100 גרם?
- ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם, מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
- ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

### תשובות סופיות

- |                     |                  |                |
|---------------------|------------------|----------------|
| 1) א. 7.28 מיליארד. | ב. 3.54 מיליארד. | ג. בשנת 2,106. |
| 2) א. 2%            | ב. 15.92 שנים.   |                |
| 3) א. 4093.65 ש.    | ב. 13.41 שנים.   |                |
| 4) 40.77 חודשים.    |                  |                |
| 5) א. 88.69 גרם.    | ב. 19,188 שנים.  |                |
| 6) א. 3.04 שבועות.  | ב. 14.6 שבועות.  |                |