

applied calculus for data science

פרק 19 - שימושי האינטגרל המסויים (שטח-אורך קשת)

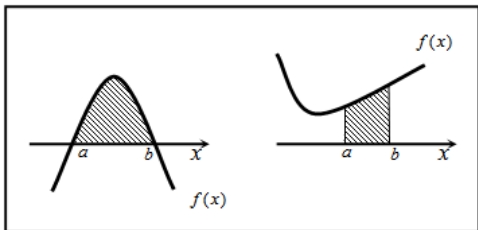
תוכן העניינים

- 1. חישוב שטחים..... 1
- 2. חישוב שטחים ביחס לציר ה- y 10
- 3. אורך קשת..... 11

חישוב שטחים

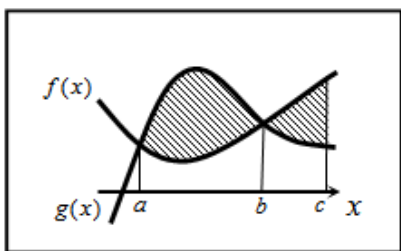
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל (מקרים פרטיים)

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים, כך שגרף אחד כולו מעל השני :

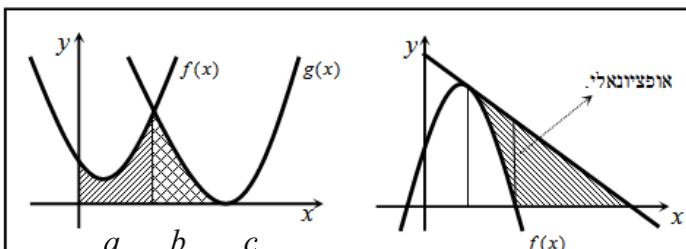


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

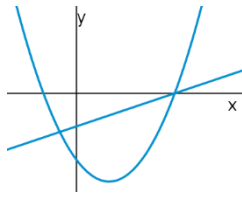
$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :

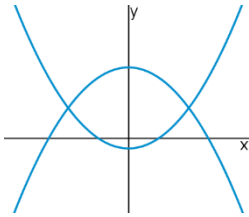


$$S = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c g(x) dx$$

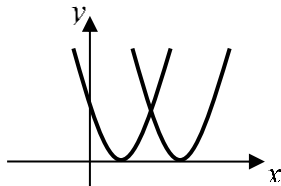
שאלות



- (1) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 4x - 12$ ו- $g(x) = x - 6$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



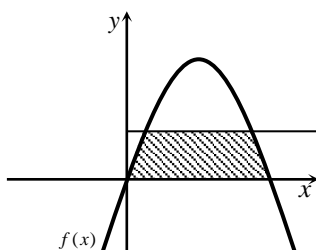
- (2) נתונות הפונקציות $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.



- (3) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות ובין ציר ה- x .



- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$.
מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .
ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = kx - x^2$.
הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.
א. מצא את ערך הפרמטר k .
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (השטח המסומן).

6 הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המתוארת באיור שלפניך,

היא $f'(x) = 3 - 2x$. ישר AB, שמשוואתו $y = 6$,

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו-B.

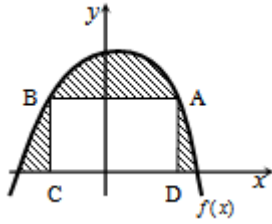
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x ,

כך שנוצר מלבן ABCD.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .



7 באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$,

את גרף הפונקציה $g(x)$, בנקודה שבה $x = 2$.

הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא $g'(x) = 2x - 8$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



8 באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר $y = 2x$.

נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא $f'(x) = 2x - 6$,

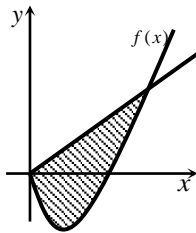
וידוע כי הישר חותך את הפונקציה

בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



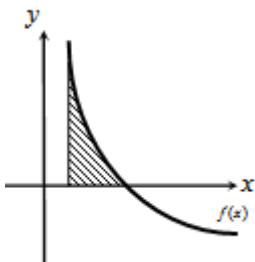
9 גרף הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2}$ (a קבוע)

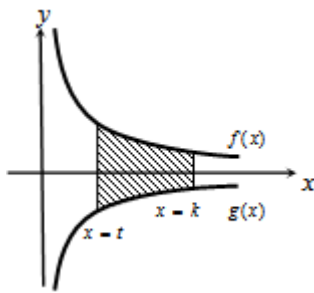
חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

ציר ה- x והישר $x = 2$.





10 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} \quad \text{ו-} \quad g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$$

מעבירים שני ישרים $x=k$ ו- $x=t$, אשר חותכים את הגרפים של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD.

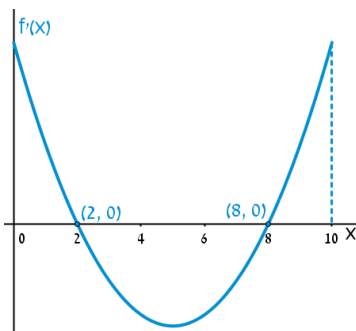
ידוע כי $AB = 2CD$.

א. הראה כי $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות והישרים $x=k$ ו- $x=t$,

הוא $S = 12$.

מצא את t .



11 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 10$.

בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

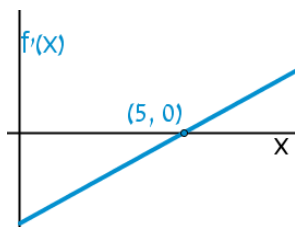
א. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

$$\text{אם } f(5) = 0, f(0) = -4, f(2) = 6$$

וכן $f(10) > 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הנגזרת והצירים

ברביע הראשון, עד לנקודה שבה $x = 2$.



12 לפניך גרף הפונקציה $f'(x)$.

הגרף המתואר חותך את ציר ה- x

בנקודה אחת בלבד והיא $(5,0)$.

א. מצא את התחומים שבהם $f'(x)$ חיובית

ואת התחומים שבהם היא שלילית.

ב. קבע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

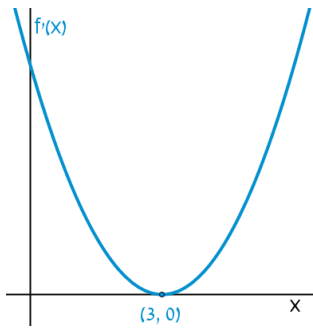
ג. כתוב את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי שיעור ה- y

שלה הוא -2.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך

את ציר ה- y כאשר $y = 8$.

ה. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$ והצירים.



13 הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$ מתוארת באיור.

א. האם ל- $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

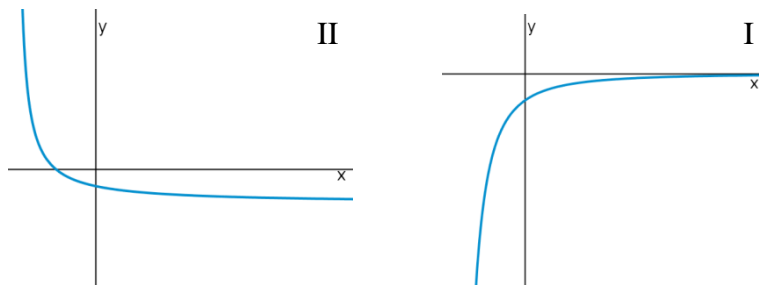
אם ידוע כי $f(3) = 4$ וכי היא חותכת את

ציר ה- y בנקודה שבה $y = -5$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הנגזרת $f'(x)$

והצירים ברביע הראשון.

14 באיורים שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$:



א. זהה איזה גרף שייך לאיזו פונקציה ונמק.

ב. נתון כי $f(10) = -3$ וכי $f(x)$ חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2$.

מהו השטח המוגבל בין גרף הנגזרת $f'(x)$, הצירים והישר $x = 10$?

15 נתון גרף הנגזרת $f'(x)$:



א. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$, בתחום $-4 \leq x \leq 7$,

לפי הנתונים $f(0) = -2$, $f(-2) = 7.6$ ו- $f(6) = -606.8$.

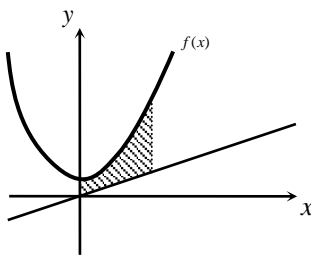
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע השלישי.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הנגזרת וציר ה- x ברביע הרביעי.

פונקציות מעריכיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות מעריכיות

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$



16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$.

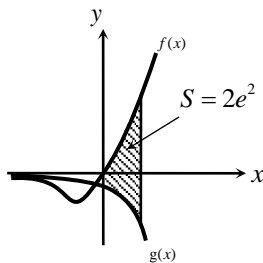
א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$,

והישר: $y = 0.1x$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר ה- y

והאנך $x = 2$.



17 ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה $y = e^x(x-1)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.

מעבירים ישר $x = a$, $(a > 0)$, החותך את

הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את

השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה- y והישר.

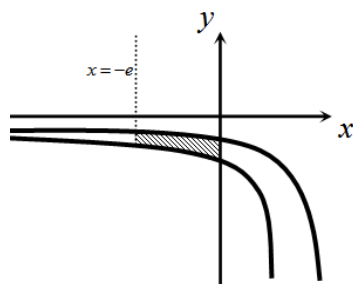
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$.

מצא את a .

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מייזים של פונקציות לוגריתמיות

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

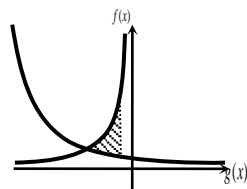


18 באיור שלפניך נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$, בתחום $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.

- מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.
- חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.



19 נתונות הפונקציות $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.

גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה $y = 0.4$.

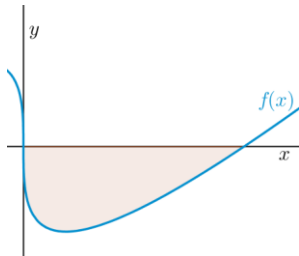
- מצא את הפונקציה $g(x)$.
- מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל על ידי שני הגרפים והישר $x = -1$.

פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

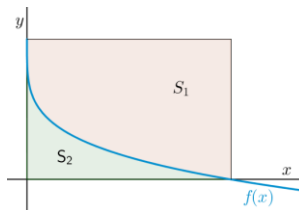
אינטגרלים מייזים של פונקציית חזקה עם מעריך רציונאלי

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

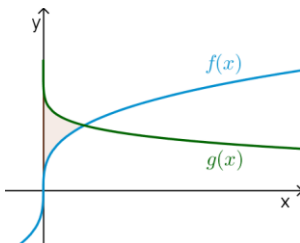
תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.



- 20** באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



- 21** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 2 - 4\sqrt[4]{x}$.
 מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן. מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים ב- S_1 ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב- S_2 .
 מצא את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.



- 22** באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ ו- $g(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$.
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

תשובות סופיות

- (1) $57\frac{1}{6}$ יח"ש. א. $y = -4x + 4$ ב. $(1, 0)$ ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש. (3)
- (2) $21\frac{1}{3}$ יח"ש. א. $k = 10$ ב. $(1, 9)$ ג. $81\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (4) $y = -4x + 4$ א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$ ב. $27\frac{1}{6}$ יח"ש.
- (5) $g(x) = (x - 4)^2$ א. $5\frac{1}{3}$ יח"ש. ב. $(0, 0)$ ג. $85\frac{1}{3}$ יח"ש.
- (6) $f(x) = x^2 - 6x$ א. 8 יח"ש. ב. $t = 1$ א. הוכחה ב. 10 יח"ש.
- (7) $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$, $a = 36$ א. 8 יח"ש. ב. 10 יח"ש.
- (8) א. הוכחה ב. $t = 1$ א. 10 יח"ש.
- (9) א. חיובית: $x > 5$, שלילית: $x < 5$. ב. עולה: $x > 5$, יורדת: $x < 5$. ג. $\min(5, -2)$ ד. הוכחה ה. 10 יח"ש.
- (10) א. לא. הנקודה $(3, 0)$ היא פיתול מכיוון שהפונקציה עולה לפנייה ואחריה. ב. הוכחה ג. 9 יח"ש.
- (11) א. $f(x): \mathbb{II}$, $f'(x): \mathbb{I}$ ב. 1 יח"ש.
- (12) א. הוכחה ב. 9.6 יח"ש. ג. 604.8 יח"ש.
- (13) א. $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$, $a = -2$ ב. 1.52
- (14) א. $y' = xe^x$ ב. $a = 2$
- (15) א. $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$, $a = 2$ ב. $S = 1.76$ יח"ש.
- (16) א. $g(x) = \frac{2}{2x+5}$ ב. $(-2, 2)$ ג. $S = \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674$ יח"ש.
- (17) א. $(0, 0)$, $(8, 0)$ ב. $S = 16$ יח"ש.
- (18) $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (19) א. $(1, 1)$ ב. $S = \frac{11}{28}$ יח"ש.

חישוב שטחים ביחס לציר ה-y

שאלות

(1) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(2) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

תשובות סופיות

(1) $20\frac{5}{6}$

(2) $20\frac{5}{6}$

אורך קשת

שאלות

חשב את אורך העקום הנתון:

$$(1 \leq x \leq 8), y = x^{2/3} \quad (2)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3)$$

$$(1 \leq x \leq 8), x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6)$$

$$(0 \leq x \leq 3), y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5)$$

$$(1 \leq x \leq 2), y = \ln x \quad (8)$$

$$(0 \leq y \leq 4), x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

תשובות סופיות

$$\frac{33}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{9} \left\{ \frac{40^{1.5}}{3} - \frac{13^{1.5}}{3} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{1097}{480} \quad (3)$$

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}3^{1.5} \right\} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

$$\frac{8}{243} \{82^{1.5} - 1\} \quad (7)$$

$$\left\{ \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \right| \right\} - \left\{ \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right| \right\} \quad (8)$$