# קומבינטוריקה

## פרק 7 - תורת הגרפים

### תוכן העניינים

# מבוא לתורת הגרפים:

## שאלות:

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג עץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

**1)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. יהי $G=(V,E)$ גרף על 43 צמתים. 10 צמתים מדרגה 7, 17 צמתים מדרגה 6, 12 צמתים מדרגה 4 והיתר מדרגה. כמה קשתות יש ב- $G$?

ב. הוכח כי בכל גרף מספר הצמתים מדרגה אי זוגית הוא זוגי.

**2)** עבור $n\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף פשוט $G_n$ באופן הבא: צמתיו הם $2^n$ הסדרות הבינאריות באורך $n$. ושני קודקודים מחוברים ביניהם בקשת אם ורק אם הם נבדלים בקורדינטה אחת. מה מספר הקשתות של $G_5$? של $G_n$? (גרף כזה נקרא גרף הקובייה).

**3)** נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\}\,\|A|=3\}$
$E=\{\{A,B\}\,\|A\cap B|=1\}$. למשל: $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$ כי בחיתוך יש איבר אחד.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?

ב. האם $G$ דו"צ?

**4)** חזור על שאלה קודמת עבור גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V$ כמו קודם
ו- $E=\{\{A,B\}\,|A\cap B=\varnothing\}$.

**5)** יהי $G=(V,E)$ על 7 צמתים. 4 מהצמתים הם מדרגה 5 וכל יתר הדרגות קטנות מ-3. מהן האפשרויות הנכונות?

א. יש גרף פשוט כזה שהוא קשיר.

ב. יש גרף פשוט כזה אבל הוא לא קשיר.

ג. יש גרף כזה אבל הוא לא פשוט ולא קשיר.

ד. יש גרף כזה והוא לא פשוט וקשיר.

**6)** נתונים שני גרפים $G_2$ , $G_1$ על 5 קודקודים סדרת דרגותיו של $G_1$ היא: 2,2,3,4,5,5,6 וסדרת דרגותיו של $G_2$ היא: 1,2,3,4,4.
לגבי כל אחד משני הגרפים קבע איזו מן הטענות הבאות נכונה:
א. יש גרף פשוט וקשיר כזה.
ב. יש גרף קשיר כזה אבל הוא לא פשוט.
ג. יש גרף פשוט כזה אבל הוא לא קשיר.
ד. יש גרף כזה אבל הוא חייב להיות לא פשוט ולא קשיר.
ה. לא קיים גרף כזה.

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהי $G$ גרף פשוט בעל $n$ קודקודים.
הוכח כי אם לכל שני קודקודים $x,y\in V$ מתקיים: $d(x)+d(y)\ge n-1$ אז $G$ קשיר.
ב. הוכח באינדוקציה כי גרף על $n$ קודקודים ופחות מ-$n-1$ קשתות אינו קשיר.

**8)** יהי $G$ גרף פשוט בעל $n$ קודקודים. הוכח כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}$ $(*)$ אז $G$ קשיר. כאשר $|E|$ זה מספר הקשתות. הראה כי חסם זה הדוק. כלומר הראה גרף פשוט $G$ עבורו: $|E|=\binom{n-1}{2}$ כך ש-$G$ אינו קשיר. זה מראה שלא ניתן לשפר את אי השוויון $(*)$.

**9)** יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט ויהיו: $u,v\in V$ , $x,y\in V$ שני קודקודים לא שכנים.
הוכח כי אם: $d(x)+d(y)\ge n$ אז יש ל-$x$ ול-$y$ לפחות שני שכנים משותפים.

**10)** יהי $G$ גרף פשוט על $n\ge 2$ צמתים ויהיו קודקודים שאינם שכנים.
הוכח כי אם: $d(u),d(v)\ge\frac{n+1}{2}$ אז יש ל-$u,v$ לפחות שלושה שכנים משותפים.

**11)** יהי $G=(V,E)$ גרף כך ש-: $V=P_2(\{1,2,..,n\}),\ (n\ge 2)$ ,
$A,B\in V \qquad A\cap B=\phi, \qquad \Leftrightarrow \qquad e\in E$.
א. חשבו את $|V|$.
ב. מהי דרגת כל צומת?
ג. הוכיחו כי אם $n\ge 5$ אזי $G$ קשיר (<u>רמז</u>: דרך השלילה).

**12)** יהי $G$ גרף פשוט על 10 קודקודים שיש בו 41 קשתות.
הוכיחו:
א. יש לפחות שני קודקודים ב-$G$ שדרגתם היא 9.
ב. $G$ קשיר.

**13)** יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט הוכח כי אם: $|V|=|E|$ אז ב-$G$ יש מעגל ואם $G$ קשיר אז המעגל יחיד.

**14)** יהי $G$ גרף פשוט קשיר בן 7 קודקודים שסדרת דרגותיו היא: 3,2,2,2,1,1,1.
כמה מעגלים פשוטים יש בגרף?

**15)** יהי $G$ גרף פשוט בעל $n$ קודקודים.
הוכח כי אם לכל קודקוד $x \in V$ מתקיים: $d(x) \geq \frac{n}{2}$ אז יש ב-$G$ מעגל באורך 4.

**16)** הוכח כי בכל גרף פשוט על 100 קודקודים שבו כל הדרגות הן לפחות 10 יש מעגל באורך $\leq 4$.

**17)** יהי $G$ גרף פשוט הוכח כי לפחות אחד מבין הגרפים $G,\bar{G}$ הוא קשיר.
ובניסוח שקול: הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם $K_n$ בשני צבעים לפחות אחד הגרפים החד צבעיים הוא קשיר.

**18)** הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם $K_6$ בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי. (משולש חד צבעי).

**19)** הוכיחו כי בכל קבוצה של 9 אנשים יש בהכרח לפחות 4 המכירים זה את זה או לפחות 3 שאף שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

**20)** יהי $G$ גרף שקודקודיו הם תתי קבוצות בנות 4 אברים של הקבוצה: $\{1,2,\ldots,n\}$ ($n$ גדול מ-6). שני קודקודים מחוברים בקשת בגרף אם בחיתוך שלהם יש שני אברים <u>בדיוק</u>. לדוגמה, הקודקוד: $\{1,2,3,4\}$ שכן של: $\{1,2,7,8\}$ אך לא של: $\{1,2,3,7\}$.
כמה קודקודים בגרף סה"כ הם שכנים של: $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$ או $\{1,2,4,5\}$?

**21)** הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם $K_{17}$ ב-8 צבעים יש מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבע אחד. (מעגל מונוכרומטי).

**22)** כמה מעגלים פשוטים באורך $3 \le k \le n$ יש בגרף השלם $K_n$ על קבוצת הקודקודים: $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ ? שני מעגלים המתקבלים אחד מין השני ע"י סיבוב נחשבים זהים. למשל עבור $n=5$ שני המעגלים הבאים: $1,2,3,4,5,1$ ו- $3,4,5,1,2,3$ נחשבים זהים ואילו המעגלים: $1,2,3,1$ ו- $1,3,2,1$ אינם זהים.

**23)** צובעים ב- $n \ge 2$ צבעים את קשתות הגרף השלם $K_n$ כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת. הוכח כי קיים מעגל שכל קשתותיו צבועות בצבעים שונים.

**24)** יהי $G$ גרף קשיר על 13 קודקודים, שניתן לצבוע בשלושה צבעים (כלומר אפשר לצבוע את הקודקודים בשלושה צבעים, כך שאין שני קודקודים מאותו צבע שמחוברים בקשת). הוכיחי שיש בגרף אנטי קליקה בגודל 5. (כלומר 5 קודקודים שאף אחד מהם לא מחובר לאף אחד אחר.)

**25)** נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים: $G_1=(V,E_1)$ , $G_2=(V,E_2)$ ו- $G_3=(V,E_3)$ . נגדיר: $G=(V,E_1\cup E_2\cup E_3)$ איחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב-$V$ דרגתו ב-$G$ היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים: $G_1$, $G_2$ ו- $G_3$ <u>אינו</u> חסר-מעגלים.
שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים.

**26)** יהי $G_n$ גרף פשוט שקודקודיו הם כל התת קבוצות של: $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ למעט $\varnothing$ ו- $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ עצמה. שני קודקודים הם שכנים אם ורק אם אף אחד אינו מוכל במשנהו.

א. הוכח כי לכל $n \ge 2$, $G_n$ קשיר.

ב. הוכח כי אם $v$ תת קבוצה בת $k$ אברים של: $\{1,2,3,4,\cdots,n\}$ אז דרגתה כקודקוד ב- $G_n$ היא: $2^n-2^{n-k}-2^k+1$ .

ג. הוכח כי לכל $n \ge 3$ קיים מעגל המילטון ב- $G_n$ . מותר להסתמך על סעיפים קודמים ועל העובדה ש- $2^{n-k}+2^k \le 2^{n-1}+2$ .

**27)** כמה זיווגים מושלמים יש? (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

א. בגרף המלא $K_5$ ?

ב. בגרף המלא $K_6$ ?

ג. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$ ? (הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי).

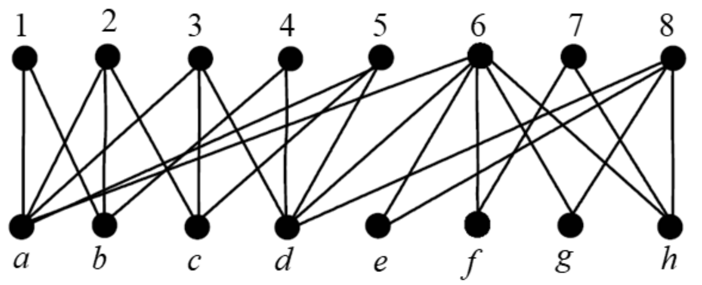
ד. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

**28)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי בגרף הבא אין זווג מושלם?

ב. מצא זווג מקסימום.

ג. מהו המספר המינימלי של קשתות שיש להוסיף לגרף כך שיהיה זווג?




**29)** יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט. נגדיר גרף חדש $H=(V,E')$ באופן הבא:

$E'=\{\{x,y\} | x,y\in V \wedge \exists z\in V:\{\{x,z\},\{y,z\}\}\subseteq E\}$.

הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $G$ קשיר אז $H$ קשיר.

ב. אם $G$ קשיר אז $H$ לא קשיר.

ג. אם $H$ קשיר אז $G$ קשיר.

ד. אם $H$ קשיר אז $G$ לא קשיר.

**30)** נתון גרף $G$ הוכח כי אם $\bar{G}$ לא קשיר אז לכל שני קודקודים $x,y$ ב- $G$ מתקיים $d(x,y)\le 2$ (כאשר $d(x,y)$ המרחק בין $x$ ל- $y$).

**31)** נתונה קבוצה בת 5 קודקודים: $V=\{v,u,t,s,r\}$.

כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים $V$ מקיימים שדרגת כל קודקוד קטנה ממש מ-4?

**32)** יהי $G$ גרף חסר מעגלים כעל 20 קודקודים ו-15 קשתות.

כמה רכיבי קשירות בגרף?

**33)** הוכח כי בכל צביעה של קשתות $K_{2t+1}$ ב- $t$ צבעים נקבל מעגל חד צבעי.

# גרף דו צדדי:

## שאלות:

1) נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\left\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| A|=3\right\}$
$E=\left\{\{A,B\} \| A\cap B|=1\right\}$.
א. האם $G$ דו צדדי?
ב. האם $G$ דו קשיר?

2) יהי $G=(V,E)$ גרף. כל צומת של $G$ היא סדרה בינארית באורך 6.
למשל 000000 צומת של $G$. שני צמתים אם מחוברים אם הם נבדלים זה מזה בשני מקומות בדיוק. למשל 010111 מחובר ל- 011101 כי הם נבדלים במקוות השלישי והחמישי.
א. כמה קשתות יש ל- $G$?
ב. האם $G$ קשיר? כמה רכיבי קשירות יש ל- $G$?
ג. האם $G$ דו״צ?
ד. (למי שלמד גרפים מישוריים, האם $G$ מישורי?)

3) מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם: $K_{2,n}$ $(n\geq 1)$ והתקבל גרף $G$ שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש- $G$ הוא עץ. (שאלה זו מופיעה גם בפרק עצים).

4) מה הגרף המשלים של הגרפים הדו״צ $K_{5,5}, K_{4,4}$ ובאופן כללי $K_{n,n}$?

5) יהיו $G_1=(V_1,E_1)$ , $G_2=(V_2,E_2)$ שני גרפים. האיחוד שלהם מוגדר להיות: $G_1\cup G_2=(V,E)$ כאשר $V=V_1\cup V_2, E=E_1\cup E_2$.
הוכח או הפרך כ״א מהטענות הבאות:
א. איחוד של שני גרפים דו״צ הוא גרף דו״צ.
ב. איחוד של שני גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ג. איחוד של $n$ גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות הוא גרף דו״צ.
ד. איחוד של $n$ גרפים דו״צ על קבוצות צמתים זרות בזוגות הוא גרף דו״צ.

6) הצג את $K_{16}$ כאיחוד של 4 גרפים דו״צ.

**7)** הוכח או הפרך את הטענה הבאה:
אם $G=(V,E)$ גרף דו"צ $k$ רגולרי שצדדיו הם $A,B$ אז $|A|=|B|$.

**8)** יהיו: $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ שבעה גרפים דו"צ שונים על אותה קבוצות צמתים $V$. לכל גרף צדדים $A_i,B_i$ כאשר: $i=1,2,3,4,5,6,7$ כמובן שבסימונים אלה מתקיים: $A_i\cap B_i=\varnothing$ , $A_i\cup B_i=V$ לכל $1\le i\le 7$.
יהי $G$ איחוד כל הגרפים האלו כאשר אם יש קשר המופיע בכמה גרפים ניקח רק קשת אחת כך שאין קשתות מרובות והגרף שהגדרנו הוא גרף פשוט.
לכל צומת ב- $G$ נתאים סדרה בת 7 אותיות לפי הצדדים אליה הוא שייך בגרפים: $G_1,G_2,G_3,\cdots,G_7$ בהתאמה.
למשל אם $v$ שייך לקבוצות: $A_1,A_2,B_3,B_4,B_5,A_6,A_7$ כלומר בשני הגרפים הראשונים הוא בצד $A$ בשלושת הגרפים הבאים בצד $B$ ובשני הגרפים האחרונים בצד $A$ אז נשמיט את האינדקסים ונתאים לו את המילה: $AABBBAA$.
כלומר ל- $v$ שלנו תתאים המילה: $AABBBAA$ ובאופן דומה לכל צומת תתאים מילה בת 7 אותיות.
הוכח כי אם לשני צמתים $u,v$ מתאימה אותה מילה אז אין צומת ב- $G$ בין $u$ לבין $v$.

**9)** יהי $G$ גרף דו צדדי: $V=V_1\cup V_2$ , $V_1\cap V_2=\varnothing$ נתון כי $G$ הוא $d$ רגולרי, $d\ge 1$.
הוכח כי: $|V_1|=|V_2|$.

**10)** הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק אז הגרף המשלים הוא דו צדדי.
ב. אם לגרף יש שני רכיבי קשירות בדיוק אז הגרף המשלים אינו דו צדדי.

**11)** כמה זיווגים מושלמים יש? (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).
א. בגרף המלא $K_5$?
ב. בגרף המלא $K_6$?
ג. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$? (הגדרת גרף דו"צ בפרק גרף דו צדדי).
ד. בגרף הדו"צ המלא $K_{5,5}$ כאשר מחקנו שלוש קשתות שיש להן צומת משותף?

**12)** יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי פשוט. $|V|=n$. הוכיחו כי: $|E|\le\frac{n^2}{4}$.

**13)** נגדיר גרף שצמתיו הם: $P(\{1,2,3,\cdots n\})$ (יש $2^n$ צמתים) ושני צמתים הם מחוברים אם אחד מהם מכיל את השני והם הבדלים באיבר אחד.
(למשל: $\{1,5,7\},\{1,2,5,7\}$ מחוברים).

א. הוכח כי $G$ קשיר.
ב. הוכח כי $G$ רגולרי.
ג. הוכח כי $G$ הוא גרף דו"צ.

**14)** הוכח או הפרך: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.
(שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים).

# עצים:

## שאלות:

**1)** יהי $T$ עץ על $n \ge 2$ קודקודים שלו בדיוק שני עלים. מהן דרגות קודקודי $T$?
רשמו אותן, לכל $n \ge 2$, בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות) והוכיחו נכונות תשובתכם.

**2)** יהי $T=(V,E)$ עץ. הוכיחו שאם כל דרגותיו אי-זוגיות אזי גם $|E|$ הוא מספר אי-זוגי.

**3)** יהי $T$ עץ על $n \ge 4$ קודקודים. אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר ב-$T$ הוא $n-2$ (יש מסלול פשוט באורך $n-2$ ואין מסלול ארוך יותר).
מהן דרגות קודקודי $T$? רשמו אותן בסדר עולה משמאל לימין (סדרת הדרגות).

**4)** יהי $T$ עץ. נוסיף ל-$T$ קודקוד שנקרא לו $v$, וקשתות מ-$v$ לחלק מקודקודי $T$.
מה צריכה להיות דרגת $v$ כדי שבגרף המתקבל יהיה בדיוק מעגל פשוט אחד?
הוכיחו שאם דרגת $v$ תהיה גדולה יותר, בגרף יהיה יותר ממעגל פשוט אחד.

**5)** $G$ גרף עם 20 קודקודים ו-15 קשתות ללא מעגלים. כמה רכיבי קשירות בגרף?

**6)** נתונה קבוצה של 10 קודקודים, ואוסף שקפים שעליהם מצוירים עצים על אותם עשרה קודקודים. גיורא מניח מספר כלשהו של שקפים זה על זה, ומקפיד שאף קשת משקף אחד לא תכסה על אותה קשת בשקף אחר (כלומר אין אף קשת משותפת לשני עצים שונים).
הוכיחו שהגרף שגיורא מקבל מאיחוד העצים שמצוירים על השקפים לא יכול להיות גרף שכל דרגותיו שוות ל-5. רמז: חשבו את מספר הקשתות בגרף.

**7)** יהיו: $T_1=\left(V,E_1\right)$ , $T_2=\left(V,E_2\right)$ שני עצים על אותה קבוצת קודקודים.
נגדיר גרף $G$ על אותה קבוצת קודקודים וקשתותיו: $E=E_1\cup E_2$.
הוכח כי קיים: $x\in V$ כך ש-$d\left(x\right)\le 3$. ( $d(x)$ דרגתו של $x$ ב-$G$).

**8)** יהיו: $T_1=\left\langle V_1,E_1\right\rangle$ , $T_2=\left\langle V_2,E_2\right\rangle$ עצים.
נגדיר גרף $G$ באופן הבא: $G=\left\langle V_1\bigcup V_2,E_1\bigcup E_2\right\rangle$.

א. נתון כי: $V_1\bigcap V_2=\{v\}$. האם $G$ בהכרח עץ? נמקו.

ב. נתון כי: $E_1\bigcap E_2=\{e\}$. האם $G$ בהכרח עץ? נמקו.

**9)** יהי $T$ עץ על $n \geq 3$ קודקודים ויהי $v$ קדקוד ב-$T$ מדרגה 2. יהי $k$ מספר רכיבי הקשירות של $T-v$ (שהוא תת הגרף של $T$ המתקבל ממחיקת $v$ (והקשתות ש-$v$ קצה שלהן). מה הם הערכים האפשריים עבור $k$? הוכיחו טענתכם!

**10)** יהי $T$ עץ בעל $n$ קודקודים. נתון כי דרגותיו הן: 1,3,5 בלבד. יש 7 קודקודים מדרגה 3 ו-10 מדרגה 5. כמה עלים יש בעץ?

**11)** יהי $T=(V,E)$ עץ שבו: $|V|=n$. דרגות צמתי $T$ הן: 1,3,5 בלבד. מס' הצמתים שלהם דרגה 3 הוא 10 ומס' הצמתים שלהם דרגה 5 הוא 12.
כמה עלים (צמתים מדרגה 1) יש לעץ?

**12)** הוכח כי בכל צביעת קשתות הגרף השלם $K_n$ בשני צבעים קיים עץ פורש מונוכרומטי.
הערה: עץ פורש הוא עץ שקודקודיו הם כל קודקודי $G$ וקשתותיו הן חלק מקשתות $G$.

**13)** יהי: $G=(V,E)$ $|V|=n,$ גרף פשוט וחסר מעגלים שבו $k$ רכיבי קשירות,
הוכיחו כי: $|E|=n-k$.

**14)** מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ <u>שאף</u> שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה גם בפרק איזומורפיזם).

**15)** מחקו $n-1$ קשתות מן הגרף הדו-צדדי השלם $K_{2,n}$ $(n \geq 1)$ והתקבל גרף $G$ שאין בו קודקודים מבודדים (כלומר אין בו קודקודים שדרגתם אפס).
הוכיחו ש-$G$ הוא עץ. (שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

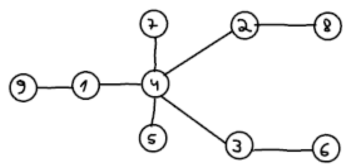
**16)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונים שלושה גרפים בעלי אותה קבוצת קודקודים: $G_1=(V,E_1)$ , $G_2=(V,E_2)$ ו-$G_3=(V,E_3)$.
נגדיר: $G=(V,E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ איחוד שלושת הגרפים, ונניח כי לכל קודקוד ב-$V$ דרגתו ב-$G$ היא לפחות 6.
הוכיחו כי לפחות אחד מהגרפים: $G_1$, $G_2$ ו-$G_3$ <u>אינו</u> חסר-מעגלים

ב. יהיו: $G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2),G_3=(V_3,E_3)$ שלושה עצים על אותה קבוצת צמתים $V$.
לכל צומת $v \in V$ נסמן: $d_i(v)$ את הדרגה של $v$ ב-$G_i$ אשר $i=1,2,3$.
הוכח כי קיים צומת $v \in V$ עבורו: $\sum_{i=1}^{3} d_i(v) \leq 5$.

**17)** מיהו העץ הממוספר המותאם למילה: $(1,1,3,4,3,6,10,1)$?

**18)** מה היא סדרת פרופר של העץ הבא?




**19)** בכמה עצים שונים על קבוצת הצמתים: $\{1,2,3,4,5,6\}$ אין שום צומת מדרגה זוגית?

**20)** בכמה עצים על קבוצת הקודקודים: $\{1,2,3,4,\cdots,10\}$ כל העלים הם מספרים זוגיים?

**21)** כמה עצים שונים יש על הקודקודים $\{1,\ldots n\}$ שלהם בדיוק שני עלים?

**22)** $T$ הוא על בעל 60 צמתים, מתוכם בדיוק 10 צמתים מדרגה 3 ואין בצמתים מדרגה גדולה מ-3.

א. הדגם עץ כזה.

ב. מצא את מספר העלים ללא שימוש בקוד פרופר. (הדוגמה מסעיף א. אינה מהווה הוכחה. דוגמה אף פעם אינה מהווה הוכחה).

ג. מצא את מספר העלים בעזרת קוד פרופר.

**23)** בכמה עצים על הקודקודים: $\{1,2,3,\cdots,10\}$ יש שלושה עלים והם (ורק הם): 8,9,10?

**24)** יהי $G$ גרף פשוט על $n$ קודקודים המכיל מעגל המילטון. נתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של $G$ שהוא עץ.
האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף $G$? אם כן מהו מספר הקשתות? (שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים).

**25)** מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה זו מופיעה בפרק איזומורפיזם).

# מעגלים מיוחדים:

## שאלות:

הערה: חלק קטן משאלות פרק זה מסתמכות על מושג עץ.
רצוי ללמוד את הפרק עצים שהוא פרק חשוב ביותר.

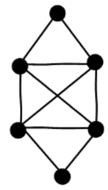
### מבוא:

**1)** צפה בסרטון על מעגלי המילטון והוכח כי:
א. תנאי אורה אינו תנאי הכרחי.
ב. החסם במשפט אורה הוא הדוק.

**2)** בשאלה זו נחקור את הקשר בין המושג מעגל אוילר לבין מעגל המילטון.
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:
א. אם $G$ המילטוני אז $G$ אוילרי.
ב. אם $G$ המילטוני אז $G$ לא אוילרי.
ג. אם $G$ לא המילטוני אז $G$ אוילרי.
ד. אם $G$ לא המילטוני אז $G$ לא אוילרי.
ה. לעניין הקשר בין המושגים, מה המסקנה המתבקשת מסעיפים א-ד?
ו. אם $G$ הוא גם אוילרי וגם המילטוני אז יש בו מסלול שהוא בעת ובעונה אחת גם מסלול אוילר וגם מסלול המילטון.
ז. אם $G$ אוילרי וגם המילטוני אז $G$ הוא מעגל פשוט.
ח. אם יש ב-$G$ מסלול שהוא בעת ובעונה אחת מעגל אוילר וגם מעגל המילטון אז $G$ הוא מעגל פשוט.

### כללי:

**1)** ענה על הסעיפים הבאים:
א. מצא מעגל אוילר, מעגל המילטון, ומסלול המילטון שאינו מעגל המילטון בגרף הבא:



ב. הוכיחו את הטענה הבאה, או תני דוגמה נגדית והסבר שמראה שאכן מדובר בדוגמה נגדית: אם בגרף יש מעגל המילטון, אז יש בו מעגל אוילר.

**2)** נגדיר גרף $G=(V,E)$ באופן הבא: $V=\{A\in P\{1,2,3,4,5,6,7\} \| |A|=3\}$
$E=\{\{A,B\} \| |A\cap B|=1\}$. למשל: $\{\{2,4,7\},\{1,4,6\}\}\in E$.

א. מהו מספר הצמתים? מה דרגת כל קודקוד? מה מספר הקשתות?
ב. האם $G$ דו"צ?
ג. האם $G$ אוילרי?
ד. האם $G$ המילטוני?

**3)** מהו האורך המירבי של מסלול ב-$K_{2n+1}$? נמקו.

**4)** הוכיחו בכל גרף שכל דרגותיו 4 ניתן לצבוע את קשתותיו כך מכל קודקוד יצאו בדיוק שתי קשתות מכל צבע.

**5)** ענה על הסעיפים הבאים:
א. יהי $G$ גרף שקודקודיו הן תתי קבוצות בנות 4 איברים של: $\{1,2,3,\cdots,8\}$ כאשר שני קודקודים הם מחוברים אם ורק אם הקבוצות יש 2 איברים בדיוק. האם ב-$G$ יש מעגל המילטון?
ב. יהי $K_{m,n}$ גרף דו צדדי שלם. הוכח כי $K_{m,n}$ המילטוני $\Leftrightarrow m=n$.

**6)** יהיו: $G_2=(V_2,E_2)$ , $G_1=(V_1,E_1)$ , $V_2\cap V_2=\varnothing$ , $E_1\cap E_1=\varnothing$ שני גרפים אוילריים פשוטים. נגדיר: $G=(V,E)$ באופן הבא: $E=E_1\cup E_2$ , $V=V_1\cup V_2$, ומלכדים צומת $u_1\in V_1$ עם צומת $u_2\in V_2$. האם $G$ אוילרי? ואם נחבר את $u_1$ עם $u_2$ במקום ללכד אותם האם כעת $G$ אוילרי?

**7)** יהי $G=(V,E)$ גרף אוילריאני בעל מספר אי זוגי של צמתים.
הוכח כי יש ב-$G$ לפחות שלושה צמתים בעלי אותה דרגה.
(שובך היונים, מספר הקודקודים $2n+1$ ויש $n$ דרגות אפשריות כי כולן זוגיות.

**8)** יהי $G$ גרף בעל שני רכיבי קשירות, $T_1$ ו-$T_2$, שכל אחד מהם עץ. מוסיפים שתי קשתות חדשות ל-$G$ (קבוצת הקודקודים נשארת ללא שינוי) ומתקבל גרף חדש $\tilde{G}$.
א. הוכיחו שב-$\tilde{G}$ בהכרח יש מעגל.
ב. בנו דוגמה שבה ב-$\tilde{G}$ יש מעגל המילטון.

**9)** יהי $G$ גרף פשוט על $n\geq 3$ קודקודים.
נתון:
(i) $n$ מספר זוגי.
(ii) כל הדרגות ב-$G$ שוות (כלומר $G$ גרף רגולרי).
(iii) גם $G$ וגם $\bar{G}$ קשירים.
הוכיחו שלפחות באחד מבין $G$ ו- $\bar{G}$ יש מעגל המילטון.

**10)** הוכח או הפרך את הטענה הבאה: אם $G$ אוילרי דו"צ אז מספר הצמתים של $G$ הוא זוגי.

**11)** עבור: $A=\{1,2,3\}$ נגדיר: $G=(V,E)$ כאשר: $V=A\times A$ (9 צמתים)
ואת $E$ קבוצת הצמתים נגדיר באופן הבא: $\{(a,b),(c,d)\}\in E$ אם ורק אם: $a+b\neq c+d$.
א. הוכח כי $G$ קשיר.
ב. מה דרגת הצומת $(1,1)$ ומה דרגת הצומת $(2,3)$? כמה קשתות יש ב- $G$?
ג. הוכח כי באין ב- $G$ מסלול אוילר.

**12)** יהי $G$ גרף פשוט 3-רגולארי על $n\geq 4$ קודקודים. נתון שב-$G$ יש מעגל המילטון.
הוכיחו שתת הגרף של $G$ המתקבל ממחיקת כל הקשתות ששייכות למעגל המילטון הוא בעל $\frac{n}{2}$ רכיבי קשירות (בפרט, עליכם להוכיח ש-$n$ זוגי!).

**13)** יהיו: $G_1=(V,E_1)$ , $G_2=(V,E_2)$ שני גרפים על אותה קבוצת קודקודים $V$.
מגדירים את הגרף: $G=(V,E_1\oplus E_2)$ כאשר: $E_1\oplus E_2$ הוא ההפרש הסימטרי של שתי קבוצות הקשתות. (כל הקשתות שנמצאות ב- $E_1$ או ב- $E_2$ אבל לא בשתיהן) הוכח כי אם ב- $G_1,G_2$ יש מעגל אוילר ואם $G$ קשיר אז גם בו יש מעגל אוילר.

**14)** יהי $G=(V,E)$ גרף על $n$ צמתים.
א. הוכח כי אם: $|E|>\binom{n-1}{2}+1$ אז $G$ המילטוני.
ב. הוכח כי החסם הנ"ל הדוק כלומר כי הטענה:
אם: $|E|\geq\binom{n-1}{2}+1$ אז $G$ המילטוני, איננה נכונה.

**15)** נתון $G=(V,E)$ גרף אוילרי ויש בו שלוש קשתות: $e_1,e_2,e_3\in E$ שלאחר הסרתן מהגרף $G$ נשאר אוילרי.

א. הדגם גרף כזה.

ב. הוכח כי $G$ לא דו"צ.

**16)** נתון $G$ גרף אוילר. נגדיר שיטה: נבחר קודקוד ונתחיל ממנו מסלול ונמשיך אותו כרצוננו כל עוד אפשר בלי לחזור על קשת פעמיים.

א. הוכח כי בשיטה זו תמיד נקבל מעגל.

ב. האם בשיטה זו מתקבל תמיד מעגל אוילר?

ג. נתון $G$ גם המילטוני האם בהכרח יש בו מסלול שהוא גם מעגל אוילר וגם מעגל המילטון?

**17)** יהי $G$ גרף פשוט על $n$ קודקודים המכיל מעגל המילטון. נתון כי על ידי השמטת קשתות המעגל מתקבל תת גרף של $G$ שהוא עץ. האם ניתן על סמך הנתונים לקבוע כמה קשתות בגרף $G$? אם כן מהו מספר הקשתות? (שאלה זו מופיעה גם בפרק מעגלים מיוחדים).

**18)** יהי $G$ גרף, לאו דווקא קשיר, שכל דרגותיו אי זוגיות. נבנה גרף $H$ שקודקודיו הם קודקודי $G$ ועוד קודקוד חדש $v$, וקשתותיו הם קשתות $G$ וכל הקשתות האפשריות בין $v$ לקודקודי $G$. הוכיחו שב-$H$ יש מעגל אוילר.

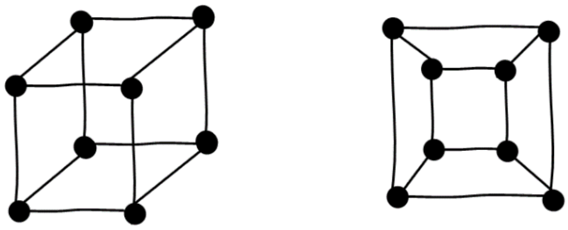
**19)** הוכח או הפרך: אם $G=(V,E)$ אוילרי דו צדדי אז: $|V|\in\mathbb{N}_{even}$.

(שאלה זו מופיעה גם בפרק גרף דו צדדי).

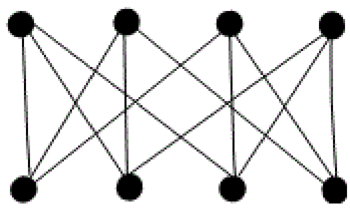
# איזומורפיזם:

## שאלות:

**1)** הוכח כי הגרפים הבאים איזומורפיים זה לזה.
זה אומר שגרף הקובייה התלת מימדי הוא מישורי.
(ניתן לשכן אותו במישור מבלי שאף צלע חותכת צלע אחרת).
(לשכן = למצוא גרף איזומורפי לו).

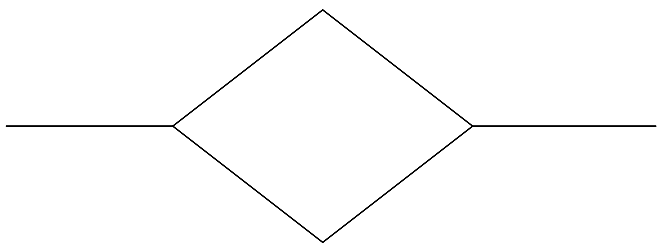


**2)** הוכח כי ניתן לשכן במישור את הגרף הבא:
כלומר קיים גרף $G$ איזומורפי לו, מבלי שאף צלע ב- $G$ חותכת צלע אחרת).

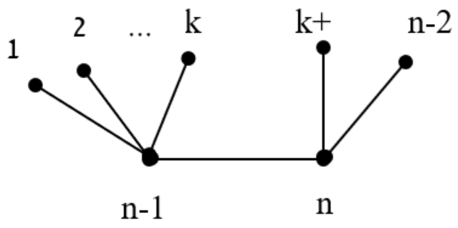


**3)** יהיו $G_1,G_2$ שני גרפים איזומורפיים. הוכח כי $G_1$ חסר מעגלים $\Leftrightarrow$ $G_2$ חסר מעגלים. הסק כי $G_1$ עץ $\Leftrightarrow$ $G_2$ עץ.

**4)** כמה גרפים שונים זה מזה ואיזומורפיים לגרף שמצויר להלן אפשר לבנות על קבוצת הקודקודים: $\{a,b,c,d,e,f\}$?



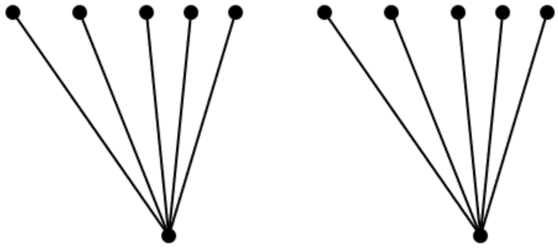
**5)** כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,...,n\}$ איזומורפיים לגרף הבא:




תנו תשובה לכל $k,n$ טבעיים המקיימים: $2\le k\le n-3$.

הפרידו בין המקרים: $n=2k+2$ , $n\neq 2k+2$.

**6)** כמה גרפים שונים על קבוצת הקודקודים: $V=\{v_1,v_2,...,v_{12}\}$ איזומורפים לגרף הבא:



**7)** הוכיחו, או תנו דוגמה נגדית והסבירו מדוע היא דוגמה נגדית:
אם לשני גרפים אותה רשימת דרגות (כלומר אם נסדר את דרגות קודקודי כל אחד מהגרפים בסדר עולה, נקבל אותה סדרה), אז הגרפים איזומורפיים.

**8)** נגדיר $C_n$ להיות מעגל על $n$ קודקודים. לאלו ערכים של $n$ מתקיים ש-$C_n$ איזומורפי ל-$\bar{C}_n$? (כאשר $\bar{C}_n$ הוא הגרף המשלים).

**9)** יהי $T$ עץ. מהי העוצמה הגדולה ביותר האפשרית לקבוצה של עצים על קבוצת הקודקודים: $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ שאף שניים מהם אינם איזומורפיים?
(שאלה לא קלה).