מבנים בדידים וקומבינטוריקה

פרק 1 - תורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. מבוא 1
2. פעולות על קבוצות 2
3. דיאגרמת וון 3
4. קריאת קבוצות 4
5. שאלות הוכחה 6
6. דרך השלילה 8
7. קבוצת חזקה 9
8. מכפלה קרטזית 11

מבוא:

שאלות:

1) לגבי כל אחד והממדים הבאים רשום ב-$\square$ את הסימנים המתאימים: $\in,\notin,\subseteq,\subset,\not\subseteq$
תיתכן יותר מתשובה אחת. במקרה שרשמת את הסימן $\not\subseteq$ נמק את תשובתך.

א. $1\square\{1,\{1\}\}$.
ב. $\{1\}\square\{1,\{1\}\}$.
ג. $\{8,\varnothing\}\ \square\ \{1,2,8\}$.
ד. $\varnothing\ \square\ \{1,2\}$.
ה. $\varnothing\ \square\ \{\varnothing,1,2\}$.
ו. $\{2\}\square\{\{1,\{2\}\}\}$.
ז. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\}\}$.
ח. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
ט. $\{2\}\ \square\ \{2,\{2,\{2\}\},\{2\}\}$.
י. $\{\{2\},\varnothing\}\ \square\ \{2,\{2\},\{\{2\}\}\}$.
יא. $\varnothing\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$.
יב. $\{\varnothing\}\ \square\ \{1,\{\varnothing\}\}$.
יג. $\{1,2\}\ \square\ \{1,\{2\}\}$.
יד. $1\ \square\ \mathbb{N}$.
טו. $\{1\}\ \square\ \mathbb{N}$.
טז. $1\ \square\ \{\mathbb{N}\}$.
יז. $\{1\}\ \square\ \{\mathbb{N}\}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\in$. ב. $\in,\subseteq,\subset$. ג. $\notin,\not\subseteq$. ד. $\notin,\subseteq,\subset$. ה. $\in,\subseteq,\subset$.
ו. $\notin,\not\subseteq$. ז. $\notin,\subseteq,\subset$. ח. $\in,\subseteq,\subset$. ט. $\in,\subseteq,\subset$. י. $\notin,\not\subseteq$.
יא. $\notin,\subseteq,\subset$. יב. $\in,\not\subseteq$. יג. $\notin,\not\subseteq$. יד. $\in,\notin$. טו. $\notin,\subseteq,\subset$.
טז. $\notin$. יז. $\notin,\not\subseteq$.

פעולות על קבוצות:

שאלות:

1) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $(A\cup C)\setminus B$. ב. $(A\cap B)\cup C$. ג. $A\cap(B\cup C)$.

ד. $P(A)$. ה. $C\setminus A$.

2) עבור $A=\{1,2,3\},B=\{3,4,5\},C=\{1,4,6\}$ ענה על השאלות הבאות:

א. האם $B\subseteq C$. ב. האם $\{1\}\subseteq B$. ג. האם $\{1\}\subseteq A$.

ד. האם $\{1\}\in P(A)$. ה. האם $\{1\}\subseteq P(A)$. ו. האם $\{\{1\}\}\subseteq P(A)$.

ז. האם $\{\{1\},\varnothing\}\subseteq P(A)$.

3) עבור $A=\{1,\{3,*\},\varnothing\},B=\{4,\varnothing\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $A\cup B$. ב. $A\cap B$. ג. $A-B$. ד. $B-A$. ה. $A\oplus B$.

תקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$.

תשובות סופיות:

1) א. $\{1,2,6\}$. ב. $\{1,3,4,6\}$. ג. $\{1,3\}$. ד. $2\notin P(A)$.

2) א. לא. ב. לא. ג. כן. ד. כן.

ה. לא. ו. כן. ז. כן.

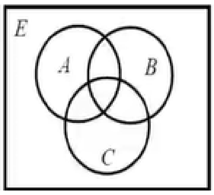
3) א. $\{1,\{3,*\},\varnothing,4\}$. ב. $\{\varnothing\}$. ג. $\{1,\{3,*\}\}$. ד. $\{4\}$.

ה. $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

דיאגרמת וון:

שאלות:

1) באיור שלפניך דיאגרמת וון:



קווקו את השטח המתאר את הקבוצות הבאות:

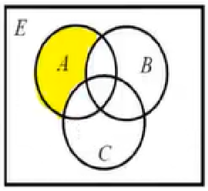
א. $(A-B)-C$. ב. $A-(B-C)$. ג. $A\cap B^c$.

ד. $(A\cap B^c)\cup(C\cap A^c)$. ה. $(A\cap B)\cap C$. ו. $A\cap(B\cap C)$.

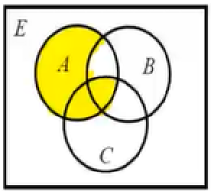
ז. $(A\cup B)\cup C$. ח. $A\cup(B\cup C)$.

תשובות סופיות:

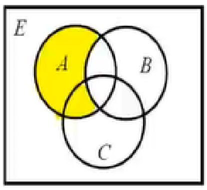
1) א.



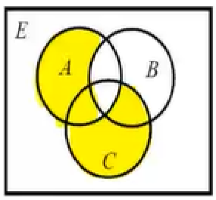
ב.



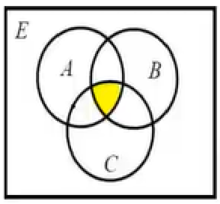
ג.



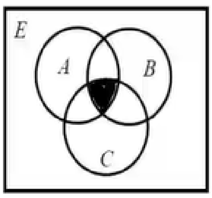
ד.



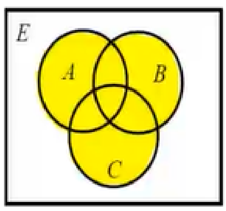
ה.



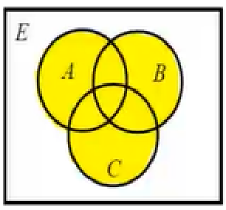
ו.



ז.



ח.



קריאת קבוצות:

שאלות:

1) צפה בשיעור קריאת קבוצות ועבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ רשום בשתי הדרכים את הקבוצות הבאות:

א. קבוצת המספרים טבעיים האי זוגיים:
$\mathbb{N}_{odd}=\{1,3,5,\ldots\}$.

ב. קבוצת כל הטבעיים שיש להם שורש ריבועי:
$A=\{1,4,9,16,25,36,49,\ldots\}$.

ג. קבוצת כל הטבעיים שאין להם שורש ריבועי:
$B=\{2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,17,18,\ldots\}$.

ד. קבוצת כל השורשים של מספרים טבעיים:
$C=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\ldots\}$.

ה. קבוצת כל החזקות של 2:
$D=\{2^1,2^2,2^3,\ldots\}=\{2,4,8,16,32,\ldots\}$.

2) עבור $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ חשב את הקבוצות הבאות:

א. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\}$.

ב. $K=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 2\to x^2>41\}$.

ג. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 7\to x<20\}$.

ד. $C=\{3n-1 \mid n\in\mathbb{N}\wedge\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}=\{3n-1 \mid \sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$.

ה. $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 8\to x^2<67\}$.

תשובות סופיות:

1) א. דרך 1: $\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\frac{n+1}{2}\in\mathbb{N}\right\}$, דרך 2: $\{2n-1|n\in\mathbb{N}\}$.

ב. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\in\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n^2|n\in\mathbb{N}\}$.

ג. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\sqrt{n}\notin\mathbb{N}\}$, דרך 2: $\{n|n\in\mathbb{N}\wedge\forall k\in\mathbb{N}\ n\neq k^2\}$.

ד. דרך 2: $\{\sqrt{n}|n\in\mathbb{N}\}$.

ה. דרך 1: $\{n\in\mathbb{N}|\exists k\in\mathbb{N}\ n=2^k\}$, דרך 2: $\{2^n|n\in\mathbb{N}\}$.

2) א. $C=\{2,5,8,11,14,17,20,...\}$.

ב. $\mathbb{Z}-\{\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,...\}$.

ג. $\mathbb{Z}-\{20,21,22,23,...\}$.

ד. $\{2,11,26,74,107,146,...\}$.

ה. $\mathbb{Z}-\{9,10,11,12,...\}$.

שאלות הוכחה:

שאלות:

לכל אחת משאלות הפרק פעל באופן הבא:

1) תהיינה A,B קבוצות.
אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ותן נימוק קצר מדוע היא נכונה.
אם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית.
בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם.
את הטענות הנכונות מבין יב-כא נסה להוכיח. במיוחד טענה יב' בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה.

א. אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.
ב. אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$.
ג. אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.
ד. אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$.
ה. אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$.
ו. אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$.
ז. אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.
ח. אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$.
ט. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A$.
י. $x \notin A - B \Leftrightarrow x \in B$.
יא. השלם $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ______.
יב. $A \subseteq B \cap C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$.
יג. $A \subseteq B \cup C \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$.
יד. אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$.
טו. אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$.
טז. אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$.
יז. אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$.
יח. אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$.
יט. אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$.
כ. אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cap B$.
כא. אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cap B$.

2) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. אם $A = A - B$ אז $B = \varnothing$.
ב. אם $A = A - B$ אז $A \cap B = \varnothing$.
ג. אם $A = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.
ד. אם $B = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.
ה. אם $A \cap B = A$ אז $A = A \cup B$.
ו. אם $A \cap B = B$ אז $A = A \cup B$.
ז. אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$.
ח. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
ט. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$.
י. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
יא. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
יב. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
יג. $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.
יד. לפניך שתי טענות הוכח את הנכונה והפרך את השגויה:
i. $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$.
ii. $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$.

תשובות סופיות:

1) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. נכונה.
ו. לא נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. $x \in B \vee x \notin A$. יב. נכונה. יג. לא נכונה. יד. לא נכונה.
טו. נכונה. טז. נכונה. יז. לא נכונה. יח. לא נכונה. יט. נכונה.
כ. נכונה. כא. לא נכונה.

2) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. נכונה. ז. נכונה. ח. לא נכונה. ט. לא נכונה. י. לא נכונה.
יא. נכונה. יב. נכונה. יג. נכונה. יד.i. נכונה. יד.ii. לא נכונה.

דרך השלילה:

שאלות:

הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה. במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

יש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

1) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$.
2) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$.
3) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$.
4) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$.
5) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.
6) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C=B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) הוכחה.

קבוצת חזקה:

שאלות:

1) עבור $C=\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}$, $B=\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}$, $A=\{3,\{\varnothing\}\}$ רשום את הקבוצות הבאות:

א. את $P(C)$ ואת $P(B)$ ואת $P(A)$.

ב. $P(A)\cap B$ ואת $P(A)\cap A$ ואת $P(C)\cap C$ ואת $C-P(C)$.

2) עבור הקבוצות $B=\{1,\varnothing\}$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$:

א. רשום את $P(A)$ ואת $P(B)$.

ב. רשום את $P(A)-P(B)$ ואת $P(B)-P(A)$.

ג. $P(A)-A$ ואת $P(A)-\{A\}$.

3) רשום את $P(\varnothing)$ ואת $P(P(\varnothing))$ ואת $P(P(P(\varnothing)))$.

4) תהיינה A,B שתי קבוצות. הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות:

א. $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$.

ב. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

ג. $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

ד. $P(A)\cap A\neq\varnothing$.

ה. $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו. תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$.

ז. אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$.

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה:

ח. אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$.

ט. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ (שאלה קשה).

5) תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. נתון $P(B)-P(A)=P(B)-\{\varnothing\}$.
הוכח כי $B-A=B$.

תשובות סופיות:

1) א. $P(A)=\{\varnothing,\{3\},\{\{\varnothing\}\},\{3,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{\{3\}\},\{\{4,\varnothing\}\},\{\{3\},\{4,\varnothing\}\}\}$,
$P(C)=\{\varnothing,\{3\},\{\{3\}\},\{\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\}\},\{3,\{\varnothing,3\}\},\{\{3\},\{\varnothing,3\}\},\{3,\{3\},\{\varnothing,3\}\}\}$.

ב. $P(A)\cap B=\{\{3\}\}$, $P(A)\cap A=\varnothing$, $P(C)\cap C=\{\{3\}\}$, $C-P(C)=\{3,\{\varnothing,3\}\}$.

2) א. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{1,\varnothing\}\}$.

ב. $P(A)-P(B)=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(B)-P(A)=\{\{1\},\{1,\varnothing\}\}$.

ג. $P(A)-A=\{\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$, $P(A)-\{A\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.

3) $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $P(P(P(\varnothing)))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

4) א. לא נכונה. ב. נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. ה. לא נכונה.
ו. ראה סרטון. ז. נכונה. ח. הוכחה. ט. הוכחה.

5) הוכחה.

מכפלה קרטזית:

שאלות:

1) תהיינה A,B,C קבוצות. הוכח כל אחת מהטענות הבאות:

א. $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$.

ב. $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$.

ג. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.

ד. אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז
$(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$.

ה. הוכח כי לכל 4 קבוצות A,B,C,D מתקיים:
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

2) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A,B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו-$D\subseteq B$ כך ש-$S=C\times D$.

3) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A,B כך ש-$|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$
(סימן $|\ |$ על קבוצה מסמן את מספר אבריה).

4) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A,B,C $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$.

5) הדגם שלוש קבוצות A,B,C כך ש-$(A\times(B\times C))\cap((A\times B)\times C)\neq\varnothing$.

תשובות סופיות:

1) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. הוכחה.
2) לא נכונה.
3) לא נכונה.
4) נכונה.
5) ראה סרטון.