

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה למדעי המחשב א

פרק 34 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

1. כללי 1

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

- אם X ו- Y משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot X}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

תזכורת:

| התפלגות | פונקציית צפיפות $f_x(t)$ | פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$ |
|-------------------------------|---|--|
| אחיד $U(a,b)$ | $f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ | $f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t < b \end{cases}$ |
| מעריכי $\exp(\lambda)$ | $f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ | $f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ |
| נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$ | $f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ |

| התפלגות | $E(X)$ | $VAR(X)$ | $M_X(t)$ |
|-------------------------------|---------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| אחיד $U(a,b)$ | $\frac{b-a}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$ |
| מעריכי $\exp(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $\frac{\lambda}{\lambda - t}$ |
| נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$ | μ | σ^2 | $e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ |

| $M_X(t)$ | $Var(x)$ | $E(x)$ | $P_X(x)$ | משמעות | משתנה מקרי |
|-------------------------|---------------------|---------------|--|---|----------------------------|
| $[pe^t + q]^n$ | $n \cdot p \cdot q$ | $n \cdot p$ | $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$ | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי n פעמים: P ההסתברות להצלחה $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון x : מספר הצלחות | בינומי $Bin(n, p)$ |
| $\frac{pe^t}{1 - qe^t}$ | $\frac{q}{p^2}$ | $\frac{1}{p}$ | pq^{x-1} $x = 1, 2, \dots, \infty$ | חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד הצלחה הראשונה. x : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה | גיאומטרי $G(p)$ |
| $e^{\lambda(e^t - 1)}$ | λ | λ | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ $0, 1, \dots, \infty$ | x : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$ | פואסוני $Pois(\lambda)$ |

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $Y \sim P(\lambda = 2)$ $X \sim P(\lambda = 4)$

X ו- Y הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של: $5X - 3$?

ב. נגדיר את: $T = X + Y$. מה ההתפלגות של T ?

שאלות:

1) נתון ש- $X_i \sim p(\lambda)$ בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של $\sum_{i=1}^n X_i$.

ב. הוכיחו ש- $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$.

2) נתון: $Y \sim P(\lambda = 2)$, $X \sim P(\lambda = 10)$.

X ו- Y הינם בלתי תלויים. נגדיר את: $T = X + Y$.

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T .

ב. הוכיחו ש- $T \sim P(\lambda = 12)$.

ג. הוכיחו ש- $X/T = 8 \sim B\left(8, \frac{5}{6}\right)$. כלומר, ההתפלגות של X ,

בהינתן ש- $T = 8$ היא בינומית עם הפרמטרים: $n = 8$ ו- $p = \frac{5}{6}$.

3) יהי: $X_i \sim \exp(1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ והמשתנים הם בלתי תלויים.

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

נגדיר את

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של T .

ב. חשבו את התוחלת והשונות של T .

ג. יהי: $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$ כלומר התקנון של T .

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של Z .

4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

הנוסחה הבאה: לכל t , כאשר: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

א. הוכיחו שאם $Y = 2X$ אזי $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$.

ב. הוכיחו שאם $T = X_1 + X_2$ ו- X_1 ו- X_2 בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש: $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$.

תשובות סופיות:

(1) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{(n\lambda)(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

(2) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{12(e^t-1)}$. ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

(3) א. פונקציה יוצרת מומנטים: $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$. ב. תוחלת: n , שונות: n .

ג. פונקציה יוצרת מומנטים: $e^{-n^{\frac{1}{2}}t} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}t}\right)}\right)^n$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.