

# תורת ההסתברות

פרק 38 - תכונות של פונקציית יוצרת מומנטים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

### רקע:

להלן מספר תכונות שפונקציית יוצרת מומנטים מקיימת:

- קיימת התאמה חד-חד-ערכית בין משתנה מקרי לבין פונקציית יוצרת המומנטים שלו.
- השפעת טרנספורמציה לינארית על פונקציית יוצרת מומנטים:

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$$

- אם  $X$  ו- $Y$  משתנים בלתי תלויים מתקיים ש:

$$M_{X+Y}(t) = E(e^{t \cdot X}) \cdot E(e^{t \cdot Y}) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

## תזכורת:

התפלגות	פונקציית צפיפות $f_x(t)$	פונקציית התפלגות מצטברת $F_x(t)$
אחיד $U(a,b)$	$f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & t < b \end{cases}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$	$f_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	$f_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$

התפלגות	$E(X)$	$VAR(X)$	$M_X(t)$
אחיד $U(a,b)$	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
מעריכי $\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$
נורמלית $N(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$M_X(t)$	$Var(x)$	$E(x)$	$P_X(x)$	משמעות	משתנה מקרי
$[pe^t + q]^n$	$n \cdot p \cdot q$	$n \cdot p$	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0, 1, \dots, n$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי $n$ פעמים: $P$ ההסתברות להצלחה $1 - P = q$ ההסתברות לכישלון $x$ : מספר הצלחות	בינומי $Bin(n, p)$
$\frac{pe^t}{1 - qe^t}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$pq^{x-1}$ $x = 1, 2, \dots, \infty$	חוזרים באופן בלתי תלוי על אותו ניסוי ברנולי עד הצלחה הראשונה. $x$ : מספר ניסויים עד הצלחה ראשונה	גיאומטרי $G(p)$
$e^{\lambda(e^t - 1)}$	$\lambda$	$\lambda$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ $0, 1, \dots, \infty$	$x$ : מספר ההופעות בלידת זמן. מ"מ המקבל ערכים $0, 1, \dots, \infty$	פואסוני $Pois(\lambda)$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון:  $Y \sim P(\lambda = 2)$   $X \sim P(\lambda = 4)$

$X$  ו- $Y$  הינם בלתי תלויים.

א. מהי פונקציית יוצרת המומנטים של  $5X - 3$ ?

ב. נגדיר את  $T = X + Y$ . מה ההתפלגות של  $T$ ?

**שאלות:**

1) נתון ש-  $X_i \sim p(\lambda)$  בלתי תלויים.

א. מצאו את פונקציית יוצרת מומנטים של  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

ב. הוכיחו ש-  $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n \cdot \lambda)$ .

2) נתון:  $Y \sim P(\lambda = 2)$ ,  $X \sim P(\lambda = 10)$ .

$X$  ו-  $Y$  הינם בלתי תלויים. נגדיר את:  $T = X + Y$ .

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של  $T$ .

ב. הוכיחו ש-  $T \sim P(\lambda = 12)$ .

ג. הוכיחו ש-  $X/T = 8 \sim B\left(8, \frac{5}{6}\right)$ . כלומר, ההתפלגות של  $X$ ,

בהינתן ש-  $T = 8$  היא בינומית עם הפרמטרים:  $n = 8$  ו-  $p = \frac{5}{6}$ .

3) יהי:  $X_i \sim \exp(1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  והמשתנים הם בלתי תלויים.

$$T = \sum_{i=1}^n X_i$$

נגדיר את

א. מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של  $T$ .

ב. חשבו את התוחלת והשונות של  $T$ .

ג. יהי:  $Z = \frac{T - E(T)}{\sigma(T)}$  כלומר התקנון של  $T$ .

מצאו את פונקציית יוצרת המומנטים של  $Z$ .

4) נתון שפונקציית יוצרת מומנטים של ההתפלגות הנורמלית נתונה על ידי

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

הנוסחה הבאה: לכל  $t$ , כאשר:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

א. הוכיחו שאם  $Y = 2X$  אזי  $Y \sim N(2\mu, 4\sigma^2)$ .

ב. הוכיחו שאם  $T = X_1 + X_2$  ו-  $X_1$  ו-  $X_2$  בלתי תלויים מאותה התפלגות

נורמלית אז מתקיים ש:  $T \sim N(2\mu, 2\sigma^2)$ .

**תשובות סופיות:**

(1) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{(n\lambda)(e^t-1)}$ . ב. שאלת הוכחה.

(2) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{12(e^t-1)}$ . ב. שאלת הוכחה.

ג. שאלת הוכחה.

(3) א. פונקציה יוצרת מומנטים:  $\left(\frac{1}{1-t}\right)^n$ . ב. תוחלת:  $n$ , שונות:  $n$ .

ג. פונקציה יוצרת מומנטים:  $e^{-n^{\frac{1}{2}}t} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}t}\right)}\right)^n$

(4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.