

אקוסטיקה

פרק 15 - תנועה הרמונית עם משוואות דיפרנציאליות ותנועה הרמונית מרוסנת ומאולצת

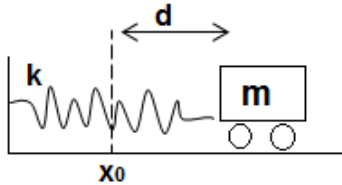
תוכן העניינים

1. תנועה הרמונית פשוטה 1
2. תנועה הרמונית מרוסנת 3
3. תנועה הרמונית מאולצת 5
4. תרגילים מסכמים 7
5. תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות) 8
6. תרגילים לבקשת סטודנטים 9
7. מסות מצומדות (ללא ספר)

תנועה הרמונית פשוטה:

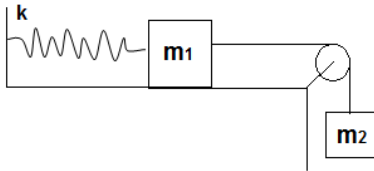
שאלות:

(1) דוגמה - מסה מתנגשת במסה



מסה m מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ המחובר לקיר בעל קבוע קפיץ k . מותחים את המסה מרחק d מהמיקום בו הקפיץ רפוי ומשחררים ממנוחה. מצא את $x(t)$ של המסה.

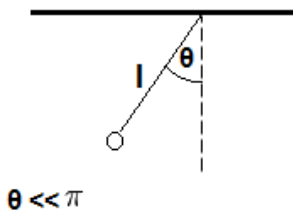
(2) דוגמה - מסה על שולחן מחוברת למסה תלויה



מסה m_1 מונחת על שולחן ללא חיכוך ומחוברת לקפיץ בעל קבוע k . מהמסה יוצא חוט העובר דרך גלגלת אידיאלית וקשור למסה נוספת התלויה באוויר M .

- מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת (קבע את הראשית בנקודה שבה הקפיץ רפוי).
- מצא את תדירות התנודה של המערכת.
- מהי האמפליטודה המקסימלית האפשרית לתנועה כך שהמתיחות בחוט לא תתאפס במהלך התנועה?

(3) דוגמה - מטוטלת מתמטית (עם אנרגיה)



נתונה מטוטלת (מתמטית) התלויה מהתקרה. אורך החוט של המטוטלת הוא l . מצא את תדירות התנודות הקטנות ואת הזווית כפונקציה של הזמן. הנח כי המטוטלת מתחילה את תנועתה ממנוחה בזווית ידועה θ (דרך אנרגיה).

תשובות סופיות:

$$x(t) = -\frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}} t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0 \quad (1)$$

$$A_{\max} = \frac{v_0}{\omega^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} \quad \text{ב.} \quad x = \frac{m_2 g}{k} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

תנועה הרמונית מרוסנת:

שאלות:

(1) כדור במיכל מים



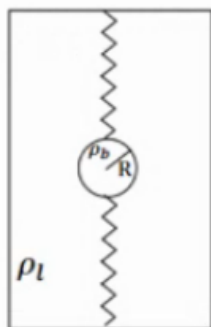
כדור בעל מסה m ורדיוס R נמצא בתוך מיכל מים ומחובר באמצעות קפיץ אופקי לדופן המיכל. קבוע הקפיץ הוא k . בתנועת הגוף במים, מפעילים המים על הכדור כוח התנגדות המתכונתי והפוך למהירותו. כוח זה נקרא כוח סטוקס וגודלו

הוא: $\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$. כאשר η היא צמיגות המים ו- R הוא רדיוס הכדור.

התייחס ל- m , k , η , R כנתונים ומצא את תדירות התנודות של הכדור

בהנחה ש- $R < \frac{\sqrt{mk}}{3\pi\eta}$. הזנח את החיכוך בין הכדור לתחתית המיכל.

(2) שני קפיצים בנוזל



כדור נמצא בתוך תיבה מלאה במים ומחובר עם קפיץ אידיאלי לקצה העליון של התיבה ועם קפיץ אידיאלי נוסף זהה לקצה התחתון של התיבה.

נתון: R - רדיוס הכדור, ρ_b - צפיפות המסה של הכדור, ρ_l - צפיפות המסה של המים, K - קבוע שני הקפיצים ו- η - צמיגות המים.

(תזכורת: כאשר כדור נמצא בתוך נוזל פועלים עליו כוח ציפה: $F = \rho_l V g$ וכוח סטוקס: $F = -6\pi\eta R v$).

א. מצא את נקודת שיווי המשקל של המערכת.

ב. מה התנאי שיהיו תנודות הרמוניות?

מצא את התדירות בהנחה שתנודות אלו מתקיימות.

ג. מצא את התנאי בו יחזור הכדור הכי מהר לנקודת שיווי המשקל.

(3) איבוד אנרגיה במחזור

בתנועה הרמונית מרוסנת קיים ריסון חלש כך שהאמפליטודה של התנועה יורדת ב-2.5 אחוז כל מחזור.

בכמה אחוז יורדת האנרגיה בכל מחזור?

תשובות סופיות:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{3\pi R\eta}{m}\right)^2} \quad (1)$$

$$\frac{2K}{m} = \frac{6\pi\eta R^2}{2m} \quad .ג$$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{2K}{m} - \left(\frac{6\pi\eta R}{2m}\right)^2} \quad .ב$$

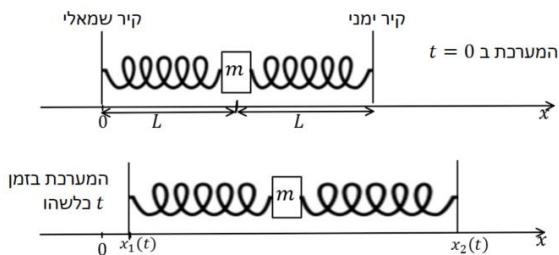
$$y_{eq} = \frac{F_b}{2K} \quad .א \quad (2)$$

$$5\% \quad (3)$$

תנועה הרמונית מאולצת:

שאלות:

1) מסה בין קירות זזים



מסה m מחוברת לשני קפיצים זהים בעלי קבוע k ואורך רפוי L משני צידיה. הקפיצים מחוברים לקירות הנמצאים במרחק L מהמסה משמאלה ומימינה והמערכת כולה מונחת על שולחן חלק (כוח הכובד לתוך הדף).

על המסה פועל כוח גרר: $F = -bv$. ב- $t=0$ הקירות מתחילים לזוז. ראשית הציירים ממוקמת במרכז התנועה של הקיר השמאלי והכיוון החיובי ימינה. מיקום הקירות כתלות בזמן הוא: $x_1(t) = d \sin(\omega t)$, $x_2(t) = 2L + 2d \sin(\omega t)$. נתונים: $d \ll L$ ו- d, L, ω, k, b, m .

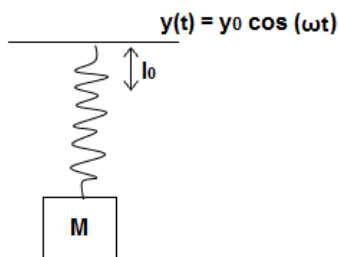
- מהי תדירות התנועה ומהי האמפליטודה?
- מה התנאי לתהודה בהנחה כי הריסון חלש מאוד?

2) מציאת תדירות ברבע אמפליטודה

מסה m מחוברת לקפיץ אופקי בעל קבוע k , המסה נעה על מישור חלק ללא חיכוך. על המסה פועל כוח גרר: $f = -bv$ וכוח מאלץ: $F(t) = d \cdot \cos(\omega t)$. מצא את תדירות הכוח בה אמפליטודת התנועה במצב העמיד תהיה רבע מהאמפליטודה המקסימלית. הנח כי: $b \ll \sqrt{mk}$, ω, b, k, m, d נתונים וכי:

3) מסה תלויה על קרש נע

מסה M מחוברת באמצעות קפיץ אנכי לקרש אופקי הנע בציר ה- y לפי: $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$.



קבוע הקפיץ k ואורכו הרפוי l_0 נתונים. מצא את מיקום המסה כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

$$\omega \sim \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{ב.} \quad A(\omega) = \frac{\frac{3kd}{m}}{\sqrt{\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2}} \omega^2 \quad \text{א. (1)}$$

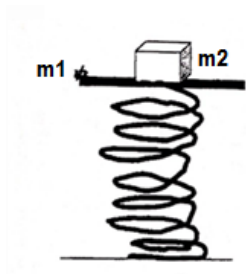
$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \quad \text{(2)}$$

$$y(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \cos \omega t + y'_0 \quad \text{(3)}$$

תרגילים מסכמים:

שאלות:

(1) מסה על משטח על קפיץ אנכי



על קפיץ שקבועו k מונח משטח שמסתו m_1 , המשטח צמוד לקצהו של הקפיץ. על המשטח מונח גוף שמסתו m_2 . מכווצים את הקפיץ בשיעור Δy ומשחררים.

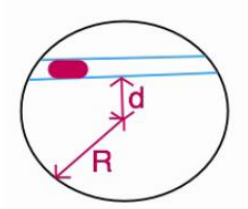
א. מה צריך להיות Δy_{\min} כדי שהגוף יתנתק מן המשטח באיזה שהוא שלב?

ב. הניחו: $\Delta y = 2\Delta y_{\min}$, $k = 10 \frac{N}{m}$, $m_1 = 0.04 \text{ kg}$, $m_2 = 0.06 \text{ kg}$.

ומצאו את רגע הניתוק.

ג. באמצעות הנתונים המספריים מסעיף ב', מהו מקומו ומהירותו של המשטח ברגע שהגוף ניתק מן המשטח?

(2) תנועה בתעלה בכדור א



בתוך כדור הארץ נחפרה תעלה כבשרטוט.

מסת כדור הארץ M .

מהי תדירות התנודות הקטנות של מסה החופשיה לנוע בתעלה?

תשובות סופיות:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \quad \text{ב.} \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{א.} \quad (1)$$

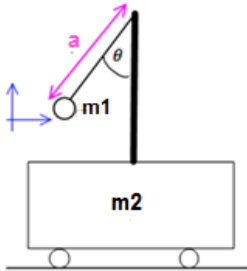
$$v(t) = \dot{y}(t) = -2\Delta y_{\min} \omega \sin(\omega t), \quad \Delta y_{\min} = \frac{(m_1 + m_2)}{k} \quad \text{ג.}$$

$$\ddot{x} = -\left(\frac{M}{R^3} \right) (x - 0) \quad (2)$$

תרגילים מסכמים (מטוטלות שונות):

שאלות:

(1) מטוטלת על עגלה נעה



עגלה בעלת מסה m_2 חופשיה לנוע על משטח אופקי ללא חיכוך. אל העגלה מחובר מוט אנכי עליו תלויה מטוטלת מתמטית עם מסה m_1 ואורך חוט a . משחררים את המסה (של המטוטלת) בזווית נתונה כאשר כל המערכת נמצאת במנוחה.

א. רשמו את מהירות המטוטלת במערכת העגלה כפונקציה של θ ו- $\dot{\theta}$.

ב. רשמו את מהירות העגלה והמטוטלת כפונקציה של θ ו- $\dot{\theta}$.

ג. רשמו את משוואת שימור האנרגיה המכאנית של המערכת.

ד. רשמו את משוואת שימור האנרגיה בתנודות קטנות.

ה. מצאו את תדירות התנודה של המסה M .

תשובות סופיות:

$$\text{א. } v_x = \dot{\theta} a \cos \theta, v_y = \dot{\theta} a \sin \theta \quad (2)$$

$$\text{ב. } v_{1x} = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a \dot{\theta} \cos \theta, v_{1y} = \dot{\theta} a \sin \theta$$

$$\text{ג. } E = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \right)^{-2} a^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2 a^2 \sin^2 \theta - m_1 g a \cos \theta$$

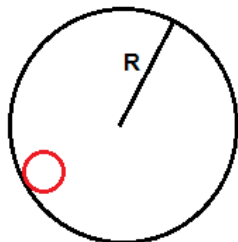
$$\text{ד. } E = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{g a}{2} \theta^2 \right) - m_1 g a \frac{1}{2}$$

$$\text{ה. } \omega = \sqrt{\frac{\frac{g a^2}{2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} a^2}}$$

תרגילים לבקשת סטודנטים:

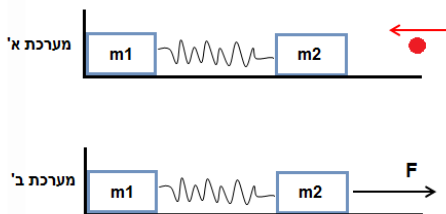
שאלות:

1) כדור מתגלגל בצינור



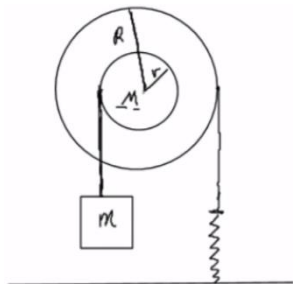
- דיסקה בעלת רדיוס r מתגלגלת בתוך צינור מקובע לרצפה בעל רדיוס R . מותר להשתמש בקירוב זוויות קטנות ומותר להזניח את הרדיוס הקטן ביחד לגדול.
- מה תהיה תדירות התנודות הקטנות של הדיסקה, בהנחה שאין חיכוך?
 - מה תהיה התשובה לסעיף א' אם יוסיפו חיכוך עם הרצפה והגלגול יהיה ללא החלקה?
 - מה תהיה התדירות עם בנוסף לחיכוך עם הרצפה יתווסף כוח חיכוך: $F = -bv$?

2) קפיץ נמתח להתארכות מקסימלית



- קליע בעל מסה זניחה נע במהירות לא ידועה לעבר מסה m_2 שמחוברת למסה m_1 דרך קפיץ בעל מקדם אלסטי k .
- המסה m_1 ניצבת בצמוד לקיר כמתואר בשרטוט.
- לאחר פגיעת הקליע הקפיץ מתכווץ במצב המקסימלי ומאבד d מאורכו.
 - מהי מהירות מרכז המסה מייד לאחר שהמערכת מתנתקת מהקיר?
 - על מערכת בעלת נתונים זהים ואורך קפיץ רפוי l מופעל כוח קבוע ואופקי F לכיוון המסומן בציור.
 - מה ההתארכות המקסימלית של הקפיץ?

3) דיסקה כפולה מסה וקפיץ



- נתונה דיסקה ממוסמרת במרכז לקיר (כלומר הדיסקה יכולה להסתובב אך לא לנוע מעלה ומטה).
- הדיסקה בנויה משתי דיסקיות מודבקות בעלות רדיוס r לדיסקה הקטנה ו- R לדיסקה הגדולה.
- סביב הדיסקות מלופפים חוטים כמתואר בשרטוט. עוד נתון כי אין החלקה לחוטים.
- מצא את תדירות התנודות.
 - מהי האנרגיה הכוללת של המערכת?

תשובות סופיות:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad \text{ג.} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{F}{2k + k \frac{m_2 - m_1}{m_1}} \quad \text{ב.} \quad v_{\text{c.m.}} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_2} d}}{m_1 + m_2} \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2} kx^2 - mgx + \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \text{ב.} \quad \omega = \sqrt{\frac{kR}{\frac{1}{2} MR + \frac{r^2}{R}}} \quad \text{א.} \quad (3)$$