

מכניקה לתעשייה וניהול

פרק 7 - תנועה מעגלית - חלק שני

תוכן העניינים

1. הקדמה ונוסחאות לחלק השני 1
2. הכוח הצנטרפוגלי 3
3. וקטורים בתנועה מעגלית 4
4. תרגילים מסכמים 7
5. תרגילים מסכמים למתקדמים 11

הקדמה ונוסחאות לחלק השני:

שאלות:

(1) זווית משתנה בזמן

- המיקום הזוויתי של נקודה על גבי שפת גלגל מסתובב נתונה ע"י: $\phi = 5t + 3t^2 - 2t^3$.
- מהי המהירות הזוויתית ב- $t = 2$ וב- $t = 4$ שניות?
 - מהי התאוצה הזוויתית הממוצעת בין זמנים אלו?
 - מהי התאוצה הזוויתית הרגעית בזמנים אלו?

(2) דוגמה-נהג מרוצים

- נהג מרוצים נוסע במסלול מעגלי שרדיוסו 50 מטר.
מהירותו של הנהג כתלות בזמן היא: $v(t) = 4t$.
- מצא את המהירות הזוויתית של הנהג כתלות בזמן ומצא את הזווית של הנהג לאחר 5 שניות? (בהנחה כי התחיל מזווית אפס).
 - מתי ישלים הנהג את הסיבוב הראשון?

(3) דוגמה-תאוצה זוויתית נהג המרוצים

- מצא את התאוצה הזוויתית בדוגמה-נהג מרוצים (שאלה 4).

(4) תאוצה משיקית קבועה

- גוף נע במעגל בעל רדיוס R בתאוצה משיקית קבועה a_t וללא מהירות התחלתית.
מצאו את גודל התאוצה הרדיאלית:
- כפונקציה של הזמן.
 - כפונקציה של זווית הסיבוב.

(5) תאוצה משיקית רדיאלית וכוללת

- גוף נע במעגל שרדיוסו 3 מטר. הדרך שעובר הגוף נתונה ע"י: $S = 6t^2 + 3t$.
חשב את התאוצה המשיקית, הרדיאלית והכוללת (כתלות בזמן).

(6) כוח על נהג המרוצים

- בדוגמה של נהג המרוצים (שאלה 4), מצא מה הכוח הפועל על המכונית אם מסת המכונית (כולל הנהג) היא טון אחד. מי מפעיל כוח זה?

תשובות סופיות:

$$\bar{\alpha} = -30 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב.} \quad \omega(t=2) = -7 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}, \quad \omega(t=4) = -67 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\alpha(t=2) = -18 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}, \quad \alpha(t=4) = -42 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad \text{ג.}$$

$$\theta(t) = 12.5 \text{ sec} \quad \text{ב.} \quad v = \frac{2t}{25}, \quad \theta(t=5 \text{ sec}) \approx 57.3^\circ \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{2}{25} \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad (3)$$

$$a_r = 2a_t \theta \quad \text{ב.} \quad a_r = \frac{(a_t \cdot t)^2}{R} \quad \text{א.} \quad (4)$$

$$a_\theta = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a_r = (4t+1)^2 \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}, \quad a = \sqrt{12^2 + 9(4t+1)^4} \quad (5)$$

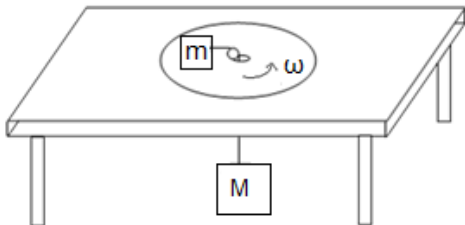
$$|F| = \sqrt{(80t)^2 + 4000^2} \quad \text{הכביש הוא מפעיל כוח החיכוך.} \quad (6)$$

הכוח הצנטרפוגלי:

שאלות:

(1) מסה על שולחן מסתובב

- מסה m מונחת על דיסק המסתובב על שולחן במהירות זוויתית קבועה ω .
 המסה מחוברת לחוט העובר דרך מרכז השולחן ומחובר למסה m .
 בין המסה m לדיסק יש חיכוך ומקדם החיכוך הסטטי הוא μ_s .
 נתון: ω, μ, m, μ_s .
 מהו הרדיוס המינימלי והרדיוס המקסימאלי שבו ניתן להניח את המסה כך שלא תזוז בכיוון הרדיאלי?



תשובות סופיות:

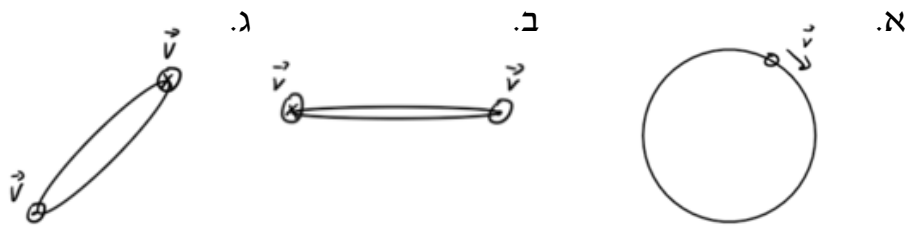
$$r_{\min}^{\max} = \frac{Mg \pm \mu_s mg}{m\omega^2} \quad (1)$$

וקטורים בתנועה מעגלית:

שאלות:

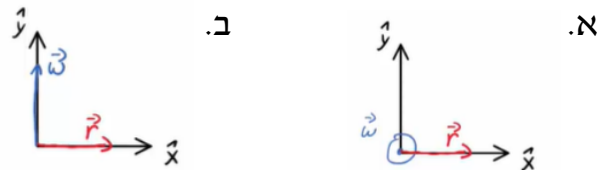
(1) מציאת הכיוון של אומגה

במקרים הבאים נתון כיוונה של המהירות הקווית של גוף הנע במעגל. מצא את הכיוון של המהירות הזוויתית בכל מקרה:



(2) תרגיל לנוסחה $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

מצא את כיוון המהירות הקווית של הגוף במקרים הבאים בהנחה כי הגוף נע בתנועה מעגלית.



(3) תאוצה זוויתית קבועה כוקטור

גוף נע במעגל בעל רדיוס קבוע שאינו ידוע.

התאוצה הזוויתית של הגוף קבועה ונתונה לפי: $\vec{\alpha} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 1\hat{z}$ ביחידות של רדיאן לשנייה בריבוע.

המיקום ההתחלתי והמהירות הזוויתית ההתחלתית הם: $\vec{r}_0 = 5\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$

במטרים ו- $\vec{\omega}_0 = -2\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}$ ברדיאן לשנייה.

מצא את גודל המהירות הקווית של הגוף ב- $t = 2 \text{ sec}$.

(4) דוגמה-וקטור המיקום של נהג המרוצים

מצא את וקטור המיקום כתלות בזמן בדוגמה עם נהג המרוצים.

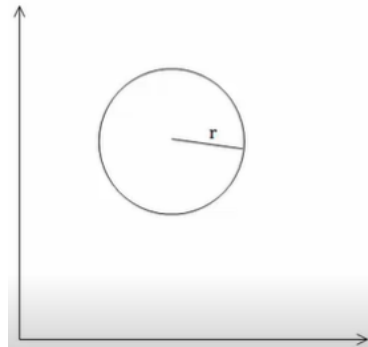
(5) תנועה מעגלית שאינה סביב הראשית

גוף נע על מעגל ברדיוס 3m.

הגוף חולף דרך הנקודה (5,4) ביחס לראשית הצירים O.

נתון כי מרכז המעגל נמצא ב- (5,7) והמהירות הזוויתית היא: $\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{20 \text{ sec}}$

- א. מצא את וקטור המיקום של הגוף כפונקציה של הזמן.
- ב. מצא את וקטור המהירות של הגוף כפונקציה של הזמן.
- ג. מצא את וקטור התאוצה של הגוף כפונקציה של הזמן.
- ד. מצא את המהירות הממוצעת בין $t = 5\text{sec}$ ל- $t = 10\text{sec}$.
- ה. מצא את תחום הזווית ביחס לראשית בו נע וקטור המקום.
- ו. מצא את תחום הגדלים של וקטור המקום.



תשובות סופיות:

$$\text{א. } \otimes \quad \text{ב. } \downarrow \quad \text{ג. } \swarrow \quad (1)$$

$$\text{א. } \hat{y} \quad \text{ב. } -\hat{z} \quad (2)$$

$$63.63 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (3)$$

$$\vec{r} = 50 \cos\left(\frac{t^2}{25}\right) \hat{x} + 50 \sin\left(\frac{t^2}{25}\right) \hat{y} \quad (4)$$

$$\vec{r} = \left(5 + 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right), 7 + 3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right) \right) \text{ א.} \quad (5)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \left(-3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right) \frac{\pi}{10}, 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{10}t\right) \frac{\pi}{10} \right) \text{ ב.}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 \vec{r} \quad \text{ג.} \quad \vec{v} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{3}{5} \right) \text{ ד.}$$

$$r_{\max} = 8.6 + 3, r_{\min} = 8.6 - 3 \quad \text{ו.}$$

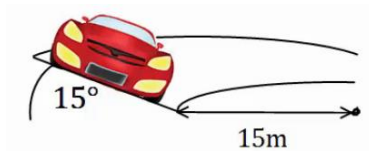
$$\theta_{\min} = 34.5^\circ, \theta_{\max} = 74.9^\circ \quad \text{ה.}$$

תרגילים מסכמים:

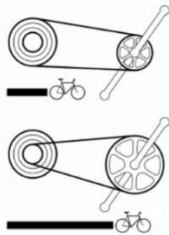
שאלות:



- (1) **מטוטלת מסתובבת אופקית**
מטוטלת בעלת אורך l מסתובבת סביב ציר האנך לתקרה בזווית מפתח קבועה θ . נתון: θ, l . מצא את התדירות וזמן המחזור של הסיבוב.



- (2) **מכונית במחלף**
מכונית נוסעת על מחלף משופע. זווית השיפוע של המחלף היא 15° מעלות. רדיוס הסיבוב של המחלף הוא 15 מטרים. אם נניח שלמכונית אין חיכוך עם הכביש, מה המהירות בה צריכה לנסוע המכונית על מנת לא להחליק?



- (3) **הילוכי אופניים**
הילוכים של אופניים מורכבים משני גלגלי שיניים ברדיוסים שונים ושרשרת המקיפה את שני הגלגלים. כאשר השרשרת מתוחה האורך שלה קבוע. מצאו את הקשר בין מהירות הסיבוב של גלגלי השיניים אם הרדיוסים שבהם מקיפה השרשרת כל אחד מהגלגלים ידועים.

- (4) **שני גופים על מסילה מעגלית אנכית (כולל עבודה ואנרגיה)**
מסילה מעגלית חלקה, דקה ובעלת רדיוס R מוצבת במישור אנכי. מישור משופע וחלק משיק למסילה ומשתלב בה כמתואר בתרשים. מציבים את בול A בגובה $2R$ ואת בול B על המישור המשופע בגובה זהה מהרצפה. נותנים ל-A דחיפה קלה ועוזבים את B ממצב מנוחה. שני הגופים מחליקים, גוף A בצידה החיצוני של המסילה ואילו גוף B משתלב ונכנס לתוך המסילה. בשלב מסוים כל אחד מהגופים מתנתק מהמסילה. התייחסו לגופים כאל גופים נקודתיים.

א. באיזו זווית θ_1 עם ציר ה-y, יתנתק גוף A מהמסילה?

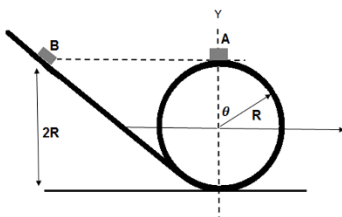
ב. באיזו זווית θ_2 יתנתק גוף B מהמסילה?

ג. אם שני הגופים מתנתקים מהמסילה בו זמנית.

מה גודל המהירות היחסית בניהם?

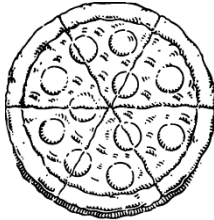
ד. מה יהיה המרחק בין הגופים לאחר הניתוק,

אחרי פרק זמן Δt (הניחו שהגופים עדיין באוויר).



(5) מציאת מיקום כפונקציה של הזמן

חלקיק מוגבל לנוע על מעגל ברדיוס R. נתון שגודל המהירות של החלקיק: $V(t) = Ct^2$ כאשר C קבוע. מצאו ופתרו את משוואת המיקום של החלקיק.

(6) מסובבים פיצה בתנועה מעגלית

מסובבים פיצה בתנועה מעגלית כך שמתקיים: $\theta = 4t^2 + 5t$ כאשר θ נמדדת ברדיאנים ו-t בשניות.

א. מצאו את המהירות הזוויתית של הבצק.

ב. מצאו את התאוצה הזוויתית של הבצק.

ג. לאחר שהוסיפו את הזיתים מסובבים עוד פעם את הפיצה באותו אופן.

מצאו את הרדיוס בו נמצא זית הנע בתאוצה משיקית של $0.2 \frac{m}{sec^2}$.

ד. חזור על סעיף ג' אם ידוע שהתאוצה הקווית הכוללת ב- $t = 1 \text{ sec}$ היא: $0.2 \frac{m}{sec^2}$.

(7) תאוצה משיקית קבועה

נקודה נעה במסלול מעגלי שרדיוסו 30 ס"מ.

הנקודה נעה בתאוצה משיקית קבועה של 4 מטר לשנייה בריבוע.

לאחר כמה זמן מתחילת התנועה התאוצה הרדיאלית של הנקודה תהיה:

א. גדולה פי 2 מהתאוצה המשיקית?

ב. שווה לתאוצה המשיקית?

(8) זווית בין משיקית לכוללת

גוף נקודתי מתחיל לנוע ממנוחה במסלול מעגלי בעל רדיוס 2 מטר בתאוצה משיקית קבועה. ידוע כי לאחר שני סיבובים שלמים הגיע הגוף למהירות קווית של 2 מטר לשנייה.

א. תוך כמה זמן השלים הגוף את שני הסיבובים הראשונים?

ב. מה הייתה התאוצה המשיקית של הגוף?

ג. מה הייתה הזווית בין וקטור התאוצה המשיקית לווקטור התאוצה השקולה לאחר שני הסיבובים הראשונים?

ד. מתי, החל מעת תחילת התנועה, תהיה התאוצה המשיקית שווה בגודלה לתאוצה המרכזית של הגוף?

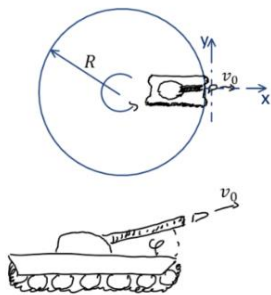
ה. איזה מרחק יעבור הגוף עד אז? (ראה סעיף ד').

9) חמישה סיבובים

נקודה שנמצאת במרחק 15 ס"מ ממרכז הגלגל, מתחילה להסתובב בתאוצה משיקית קבועה. הנקודה מגיעה למהירות זוויתית של $20 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ לאחר 5 סיבובים. מצא את:

- התאוצה המרכזית של הנקודה כעבור 5 שניות.
- התאוצה המשיקית של הנקודה כעבור 5 שניות.
- התאוצה השקולה של הנקודה כעבור 5 שניות.

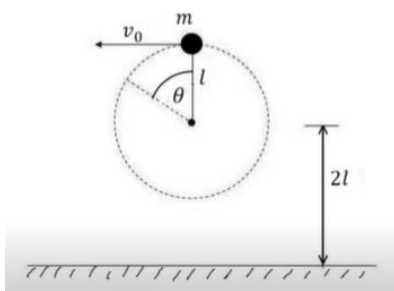
10) טנק יורה פגז מדיסקה מסתובבת



טנק נמצא בקצה של דיסקה ברדיוס R היכולה להסתובב במקביל לקרקע. הדיסקה מתחילה להסתובב ב- $t = 0$ בתאוצה זוויתית $\ddot{\theta} = kt^2$. כעבור זמן t_0 הטנק נמצא במיקום שבאיור ויורה פגז. מהירות הלוע של הפגז היא v_0 . התותח מכיוון בכיוון הרדיאלי כלפי חוץ, ובזווית φ מעל הקרקע (במאונך למישור שבו מסתובבת הדיסקה).

- באיזה מהירות ביחס לצופה ניח יוצא הכדור מלוע הטנק?
- באיזה מרחק מנקודת הירי יפגע הפגז?

11) חוט נקרע במעגל אנכי גבוה



כדור קטן שמסתו m קשור לקצהו של חוט שאורכו l. הכדור מסתובב במעגל אנכי שמרכזו בגובה 2l מעל הרצפה. כאשר החוט מתוח והכדור נמצא אנכית מעל ציר סיבוב מעניקים לו מהירות אופקית v_0 .

- מה המהירות המינימלית v_0 הנדרשת כדי שהכדור יבצע תנועה מעגלית שלמה?
- מעניקים לכדור מהירות התחלתית: $v_0 = 1.5\sqrt{gl}$, אם החוט נקרע ברגע שמתוחותו עולה על $5.25mg$ מצאו את הזווית θ שבה יקרע החוט.
- מה המהירות הכדור ברגע שהחוט נקרע, אם נתון ש: $l = 2m$?
- תוך כמה זמן מרגע קריעת החוט יפגע הכדור ברצפה?

תשובות סופיות:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

$$V \approx 6.34 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (2)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (3)$$

$$d = \sqrt{\frac{8}{3}gR\Delta t} \quad \text{ז} \quad |\vec{V}_{AB}| = \sqrt{\frac{8}{3}gR} \quad \text{ג} \quad \theta_2 = \theta_1 = 48.2^\circ \quad \text{ב} \quad \theta_1 = 48.2^\circ \quad \text{א} \quad (4)$$

$$x = R \cos \frac{C \cdot t^3}{3R}, y = R \sin \left(\frac{C \cdot t^3}{3R} \right) \quad (5)$$

$$R = 2.5\text{cm} \quad \text{ג} \quad \alpha = \dot{\omega} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב} \quad \omega = \dot{\theta} = 8t + 5 \quad \text{א} \quad (6)$$

$$1.18 \cdot 10^{-3} \text{m} \quad \text{ז}$$

$$t \approx 0.27 \text{sec} \quad \text{ב} \quad t \approx 0.39 \text{sec} \quad \text{א} \quad (7)$$

$$t_2 = 5 \text{sec} \quad \text{ז} \quad \alpha = 87.73^\circ \quad \text{ג} \quad a_\theta \approx 0.08 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב} \quad t_1 \approx 25.1 \text{sec} \quad \text{א} \quad (8)$$

$$S = 1\text{m} \quad \text{ה}$$

$$|a| \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ג} \quad a_\theta \approx 0.95 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{ב} \quad a_r \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad \text{א} \quad (9)$$

$$v_x = v_0 \cos \varphi, v_y = \frac{kt_0^3 R}{3}, v_z = v_0 \sin \varphi \quad \text{א} \quad (10)$$

$$d = \left[(v_0 \cos \varphi)^2 + \left(\frac{kt_0^3 R}{3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left(t_0 + \frac{2v_0 \sin \varphi}{g} \right) \quad \text{ב}$$

$$t \approx 0.3 \text{sec} \quad \text{ז} \quad v \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad \text{ג} \quad \theta \approx 110^\circ \quad \text{ב} \quad v_{\min} = \sqrt{gl^5} \quad \text{א} \quad (11)$$

תרגילים מסכמים למתקדמים:

שאלות:

(1) נקודה על גלגל

מיקומו של גוף כתלות הזמן נתון ע"י: $y(t) = R - R \cos(\omega t)$, $x(t) = R\omega t - R \sin(\omega t)$ כאשר R ו- ω קבועים.

- א. מצאו את וקטורי המהירות והתאוצה של הגוף.
- ב. מצאו את גודל התאוצה המשיקית והנורמאלית.
- ג. ציירו את מסלול הגוף.

(2) חבל עם מסה מסתובב*

נתון חבל אחיד בעל מסה m ואורך l .
 החבל קשור בקצה אחד ומסתובב במישור אופקי במהירות זוויתית ω .
 מצא את גודל המתיחות לאורך החבל (כתלות במרחק מהקצה הקשור).
 רמז: יש לחלק את החבל לחתיכות קטנות ולעשות משוואת תנועה על כל חתיכה.

(3) מטוטלת כפולה מסתובבת אופקית*

גוף בעל מסה m_1 מחובר באמצעות חוט באורך l_1 לתקרה.
 גוף בעל מסה m_2 מחובר באמצעות חוט באורך l_2 לגוף הראשון.
 שני הגופים מסתובבים יחדיו בתדירות זוויתית קבועה ω סביב ציר האנך לתקרה.
 הזוויות בין החוטים לאנכים הן: α , β (ראה איור).

א. רשום את משוואת התנועה לכל גוף.

ב. מצא מהי הזווית α עבור המקרה בו $m_2 = 0$ ו- $m_1 \neq 0$.

מהי תדירות הסיבוב המינימלית האפשרית?

ג. דני ויוסי ניסו למצא את ω במקרה הכללי.

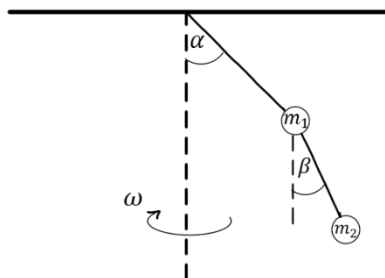
דני הציב את גדלי המתיחות של החוטים במשוואת התנועה של גוף 2

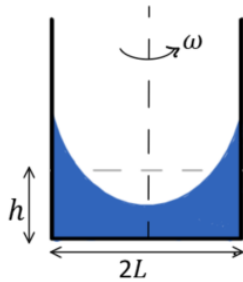
$$\text{וקיבל: } \omega^2 = \frac{g \tan \beta}{l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta}$$

יוסי הציב את המתיחות במשוואת התנועה

$$\text{של גוף 1 וקיבל: } \omega^2 = \frac{g}{l_1} \cdot \frac{\frac{m_1 + m_2}{m_1} \tan \alpha - \frac{m_2}{m_1} \tan \beta}{\sin \alpha}$$

ישב את הסתירה.





(4) מים בכלי מסתובב**

תיבה באורך $2L$ ורוחב ω כך ש- $\omega \ll L$ מכילה מים. גובה המים בתיבה הוא h . מסובבים את התיבה במהירות זוויתית ω סביב ציר העובר במרכזה. הנח כי המים לא נשפכים מהתיבה.

א. מצאו את הפונקציה המתארת את פני המים במרחב (רמז: חשבו את השיפוע של המשיק לפני המים בנקודה כלשהיא, שיפוע זה הוא הנגזרת של הפונקציה).

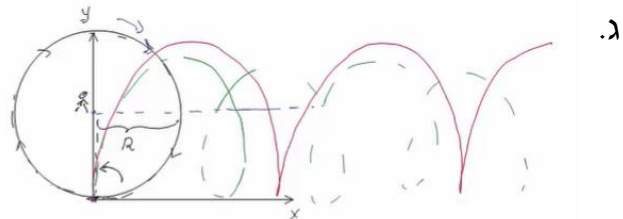
- ב. מהו הפרש הגבהים בין המים במרכז התיבה למים במרחק אופקי d מהמרכז?
- ג. מה יהיה הפרש הגבהים אם נגדיל את מהירות הסיבוב פי 2?
- ד. מהו התנאי שתחתית התיבה תתייבש בנקודה כלשהיא?

תשובות סופיות:

א. $\vec{v} = (R\omega - R \cos(\omega t) \cdot \omega) \hat{x} + R \sin(\omega t) \cdot \omega \hat{y}$ (1)

$\vec{a} = R\omega^2 \sin(\omega t) \hat{x} + R\omega^2 \cos(\omega t) \hat{y}$

ב. $|\vec{a}_t| = \frac{R\omega^2 (\sin \omega t)}{\sqrt{2(1 - \cos \omega t)}}$, $|\vec{a}_n| = \frac{R\omega^2 (\cos(\omega t) - \cos(2\omega t))}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega t))}}$ (1)



$T(x) = \frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - x^2)$ (2)

גוף 1: $\sum F_x = m_1 \omega^2 l_1 \sin \alpha$, $\sum F_y = 0$ (3)

גוף 2: $\sum F_x = m_2 \omega^2 (l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta)$, $\sum F_y = m_2 g$

א. $y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + h - \frac{\omega^2 L^2}{6g}$ (4)

ג. $\Delta y = \frac{2\omega^2 d^2}{g}$

ב. $\Delta y = \frac{\omega^2 d^2}{2g}$

ד. $h = \frac{\omega^2 L^2}{6g}$